

1. Esercizio

1. Utilizzare i valori di porosità iniziale (ϕ_0) per calcolare la conduttività termica con le due equazioni sottostanti (geometric mean e square root mean) in ciascuno strato di una stratigrafia così composta:

Sand: 1300 m (depth), 35% (ϕ), 1.79 W/mK (conductivity)

Siltstone: 3500 m (depth) 30% (ϕ), 1.58 W/mK (conductivity)

Clay: 4800 m (depth) 25% (ϕ), 1.43 W/mK (conductivity)

Marl: 7200 m (depth) 15% (ϕ), 1.68 W/mK (conductivity)

Limestone: 10000 m (depth) 25% (ϕ), 2.37 W/mK (conductivity)

Factor b is 0.180 and 0.396 km^{-1} in carbonate rocks, 0.298 and 0.461 km^{-1} in marls and silty marls, 0.284 and 0.216 km^{-1} in sandstones and calcarenites, and 0.293 and 0.379 km^{-1} in shales and siltstones.

$$k_{in} = k_m^{(1-\phi)} k_w^\phi \quad \phi = \phi_0 e^{-bz} \quad (\text{per la stima della porosità } z \text{ è in km se } b \text{ è in km})$$

$$\lambda(z) = \lambda_m^{1-\phi(z)} \lambda_f^{\phi(z)} \quad \lambda(z) = [(1 - \phi(z)) \times \lambda_m^{1/2} + \phi(z) \times \lambda_f^{1/2}]^2$$

(geometric mean)

(square root mean)

$$K_w = 0.6 \text{ W/mK}$$

2. Fare un plot dei valori di conduttività termica ottenuti in funzione della profondità.
3. Calcolare il valore medio di conduttività termica di ciascuno strato (media aritmetica) e della formazione sedimentaria applicando una media armonica (usata nel caso di una stratificazione orizzontale).

Esercizio 2

1. Costruire una geoterma nei primi 10 km usando un gradiente che varia da 30°C/km (a 0 km) a 21°C/km (a 10 km). Ripetere il primo esercizio considerando la dipendenza della conduttività dalla temperatura usando le equazioni sottostanti per la conduttività termica della matrice e dell'acqua presente nei pori.

Condizione iniziale: T_0 (0 km) = 0; T_1 (1 km) = 30°C

$$k_m = 1.8418 + (k_0 - 1.8418) \left(\frac{1}{0.002732 T + 0.7463} - 0.2485 \right)$$

$$k_w = 0.5648 + 1.878 \times 10^{-3} T - 7.231 \times 10^{-6} T^2 \quad \text{for } T \leq 137^\circ\text{C}$$

$$K_w = 0.6020 + 1.309 \times 10^{-3} T - 5.140 \times 10^{-6} T^2 \quad \text{for } T > 137^\circ\text{C}$$

2. Fare un plot dei valori di conduttività termica ottenuti in funzione della profondità.
3. Calcolare il valore medio di conduttività termica della formazione sedimentaria, applicando una media armonica (usata nel caso di una stratificazione orizzontale).

Esercizio 3

1. Calcolare la conduttività termica reticolare e radiativa (e la loro somma) con le equazioni di Hasterock e Chapman (2011), usando la geoterma in Tab. 4 e la pressione in Tab. 3, per una olivina contenente il 90% di forsterite.
2. Fare un plot dei valori di conduttività termica ottenuti in funzione della temperatura.

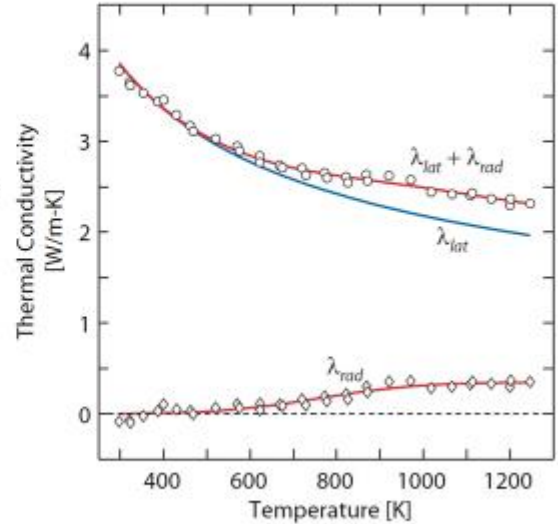
Thermal Conductivity (Lattice+Radiative Conductivity)

$$\lambda_L(P, T) = \lambda_0 \left(\frac{298}{T} \right)^n \left(1 + \frac{K'_T P}{K_T} \right)$$

λ_0 = conductivity at 0 GPa and 298 K
 K_T and K'_T = isothermal bulk modulus and its first pressure derivative
 n = an empirically derived fitting constant.

$$\lambda_R(T) = \frac{1}{2} \lambda_{Rmax} \left[1 + \exp\left(\frac{T - T_R}{\omega} \right) \right]$$

λ_{Rmax} = maximum radiative conductivity,
 ω = scaling factor
 T_R = temperature at $0.5\lambda_{Rmax}$



Hasterock and Chapman, 2011, EPSL, 307

Empirical constants for estimating conductivity.

| mineral | λ_0 W/m-K | λ_1 W/m-K | λ_2 W/m-K | n | λ_{Rmax} W/m-K | ω K | T_R K | Notes |
|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------|---------------------------|---------------|------------|--------------|
| a-quartz | 8.79 | | | 1.48 | 1.62 | 153 | 558 | 1,2 |
| b-quartz | 0.99 | | | -1.00 | 1.62 | 153 | 558 | 1,2 |
| orthoclase | 1.79 | | | -0.27 | 0.390 | 264 | 864 | 2 |
| plagioclase (an) | 2.2 | -2.18 | 1.9 | -0.21 | 0 | | | 3,4,5,6 |
| biotite | 2.27 | | | 1.54 | 0.233 | 364 | 520 | 7,8 |
| hornblende | 2.65 | | | 0.5 | 0.345 | 256 | 762 | 5,9,10,11,12 |
| clinopyroxene | 4.25 | | | 0.54 | 0.345 | 256 | 762 | 5,13,12,14 |
| orthopyroxene | 3.37 | | | 0.3 | 0.345 | 256 | 762 | 5,13,12 |
| olivine (fo) | 3.09 | -1.17 | 3.35 | 0.49 | 0.345 | 256 | 762 | 5,9,13,12 |
| spinel (sp) | 11.94 | 5.47 | 8.71 | 1.24 | 0 | | | 15,16 |
| garnet (py) | 4.97 | -7.42 | 8.45 | 0.37 | 0 | | | 16,17,18 |

Lattice conductivity is computed as, $\lambda^0 = \lambda_0 + \lambda_1\chi + \lambda_2\chi^2$, where χ is the mole fraction of the end-member (an) anorthite, (fo) forsterite, (sp) spinel, and (py) pyrope.

Physical properties and empirical constants for mineral end-members

| Mineral | w g mol ⁻¹ | ρ_{298} kg m ⁻³ | $a_0 \times 10^5$ K ⁻¹ | $a_1 \times 10^8$ K ⁻² | a_2 K | K_T GPa | K'_T | γ_{th} | δ_T | Notes |
|--------------|----------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------|--------------|--------|---------------|------------|---------|
| alpha-quartz | 60.08 | 2648 | 1.4170 | 9.6581 | -1.6973 | 37.1 | 5.99 | 0.7 | 8.42 | 1,2 |
| beta-quartz | 60.08 | 2530 | -0.4400 | | | 57 | 4 | 0.1 | 4.11 | 1,2 |
| orthoclase | 278.34 | 2555 | 3.4000 | | | 58.3 | 4 | 0.4 | 4.44 | 1,2 |
| albite | 262.22 | 2620 | 1.9801 | 1.0065 | -0.9760 | 53.8 | 6 | 0.6 | 6.57 | 1,2,8 |
| anorthite | 278.21 | 2760 | 1.2491 | -0.0162 | 0.0161 | 82.5 | 3.2 | 0.6 | 3.47 | 1,2,8 |
| phlogopite | 417.29 | 2788 | 5.8000 | | | 54 | 7.8 | 0.6 | 4.55 | 1,2,3,4 |
| hornblende | 864.70 | 3248 | 2.0750 | 1.0270 | | 94 | 4 | 1.1 | 5.1 | 1,2,3 |
| diopside | 216.56 | 3272 | 3.3300 | | | 113 | 4.8 | 1 | 6.04 | 1,2 |
| hedenbergite | 248.10 | 3651 | 2.9800 | | | 119 | 4 | 1.5 | 5.21 | 1,2,3 |
| enstatite | 100.40 | 3206 | 2.9720 | 0.5711 | | 105.8 | 8.5 | 1.01 | 9.39 | 1,5,9 |
| ferrosillite | 131.93 | 4003 | 2.8750 | | | 100 | 8.8 | 0.88 | 9.05 | 1,6,10 |
| forsterite | 140.71 | 3222 | 2.8540 | 1.0080 | -0.3842 | 128 | 4.2 | 0.99 | 5.19 | 1,2,11 |
| fayalite | 203.78 | 4400 | 2.3860 | 1.1530 | -0.0518 | 135 | 4.2 | 1.06 | 5.26 | 1,2,11 |
| spinel | 142.27 | 3575 | 1.9600 | 1.6400 | | 205 | 4.1 | 1.73 | 6.5 | 1,7 |
| pyrope | 403.15 | 3565 | 2.3110 | 0.5956 | -0.4538 | 173 | 5 | 1.29 | 5.3 | 1,2 |
| almandine | 497.75 | 4324 | 1.7760 | 1.2140 | -0.5071 | 174 | 6 | 1.29 | 5.52 | 1,2 |

| Depth (km) | Pressure (GPa) |
|------------|----------------|
| 0 | 0 |
| 3.5 | 0.1 |
| 35 | 1 |
| 50 | 1.45 |
| 75 | 2.285 |
| 100 | 3.115 |
| 125 | 3.945 |
| 150 | 4.78 |

Tab. 3 Pressure vs Depth

| Depth (km) | T (°C) |
|------------|--------|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 7.25 |
| 1 | 14.5 |
| 1.5 | 21.75 |
| 2 | 29 |
| 2.5 | 36.25 |
| 3 | 43.5 |
| 3.5 | 50.75 |
| 4 | 58 |
| 4.5 | 65.25 |
| 5 | 72.5 |
| 5.5 | 79.75 |
| 6 | 87 |
| 6.5 | 94.25 |
| 7 | 101.5 |
| 7.5 | 108.75 |
| 8 | 116 |
| 8.5 | 123.25 |
| 9 | 130.5 |
| 9.5 | 137.75 |
| 10 | 145 |
| 10.5 | 151.5 |
| 11 | 158 |
| 11.5 | 164.5 |
| 12 | 171 |
| 12.5 | 177.5 |
| 13 | 184 |
| 13.5 | 190.5 |
| 14 | 197 |
| 14.5 | 203.5 |
| 15 | 210 |
| 15.5 | 216.5 |
| 16 | 223 |
| 16.5 | 229.5 |

| | |
|------|--------|
| 17 | 236 |
| 17.5 | 242.5 |
| 18 | 249 |
| 18.5 | 255.5 |
| 19 | 262 |
| 19.5 | 268.5 |
| 20 | 275 |
| 20.5 | 280.75 |
| 21 | 286.5 |
| 21.5 | 292.25 |
| 22 | 298 |
| 22.5 | 303.75 |
| 23 | 309.5 |
| 23.5 | 315.25 |
| 24 | 321 |
| 24.5 | 326.75 |
| 25 | 332.5 |
| 25.5 | 338.25 |
| 26 | 344 |
| 26.5 | 349.75 |
| 27 | 355.5 |
| 27.5 | 361.25 |
| 28 | 367 |
| 28.5 | 372.75 |
| 29 | 378.5 |
| 29.5 | 384.25 |
| 30 | 390 |
| 30.5 | 395.75 |
| 31 | 401.5 |
| 31.5 | 407.25 |
| 32 | 413 |
| 32.5 | 416 |
| 33 | 420 |
| 33.5 | 424 |
| 34 | 428 |
| 34.5 | 432 |
| 35 | 436 |
| 35.5 | 440 |
| 36 | 444 |
| 36.5 | 448 |
| 37 | 452 |
| 37.5 | 456 |
| 38 | 460 |
| 38.5 | 464 |
| 39 | 468 |
| 39.5 | 472 |
| 40 | 476 |
| 40.5 | 480 |
| 41 | 484 |
| 41.5 | 488 |
| 42 | 492 |

| | |
|------|-----|
| 42.5 | 496 |
| 43 | 500 |
| 43.5 | 504 |
| 44 | 508 |
| 44.5 | 512 |
| 45 | 516 |
| 45.5 | 520 |
| 46 | 524 |
| 46.5 | 528 |
| 47 | 532 |
| 47.5 | 536 |
| 48 | 540 |
| 48.5 | 544 |
| 49 | 548 |
| 49.5 | 552 |
| 50 | 556 |
| 50.5 | 560 |
| 51 | 564 |
| 51.5 | 568 |
| 52 | 572 |
| 52.5 | 576 |
| 53 | 580 |
| 53.5 | 584 |
| 54 | 588 |
| 54.5 | 592 |
| 55 | 596 |
| 55.5 | 600 |
| 56 | 604 |
| 56.5 | 608 |
| 57 | 612 |
| 57.5 | 616 |
| 58 | 620 |
| 58.5 | 624 |
| 59 | 628 |
| 59.5 | 632 |
| 60 | 636 |
| 60.5 | 640 |
| 61 | 644 |
| 61.5 | 648 |
| 62 | 652 |
| 62.5 | 656 |
| 63 | 660 |
| 63.5 | 664 |
| 64 | 668 |
| 64.5 | 672 |
| 65 | 676 |
| 65.5 | 680 |
| 66 | 684 |
| 66.5 | 688 |
| 67 | 692 |
| 67.5 | 696 |

| | |
|------|-----|
| 68 | 700 |
| 68.5 | 704 |
| 69 | 708 |
| 69.5 | 712 |
| 70 | 716 |
| 70.5 | 720 |
| 71 | 724 |
| 71.5 | 728 |
| 72 | 732 |
| 72.5 | 736 |
| 73 | 740 |
| 73.5 | 744 |
| 74 | 748 |
| 74.5 | 752 |
| 75 | 756 |
| 75.5 | 760 |
| 76 | 764 |
| 76.5 | 768 |
| 77 | 772 |
| 77.5 | 776 |
| 78 | 780 |
| 78.5 | 784 |
| 79 | 788 |
| 79.5 | 792 |
| 80 | 796 |
| 80.5 | 800 |
| 81 | 804 |
| 81.5 | 808 |
| 82 | 812 |
| 82.5 | 816 |
| 83 | 820 |
| 83.5 | 824 |
| 84 | 828 |
| 84.5 | 832 |
| 85 | 836 |
| 85.5 | 840 |
| 86 | 844 |
| 86.5 | 848 |
| 87 | 852 |
| 87.5 | 856 |
| 88 | 860 |
| 88.5 | 864 |
| 89 | 868 |
| 89.5 | 872 |
| 90 | 876 |
| 90.5 | 880 |
| 91 | 884 |
| 91.5 | 888 |
| 92 | 892 |
| 92.5 | 896 |
| 93 | 900 |

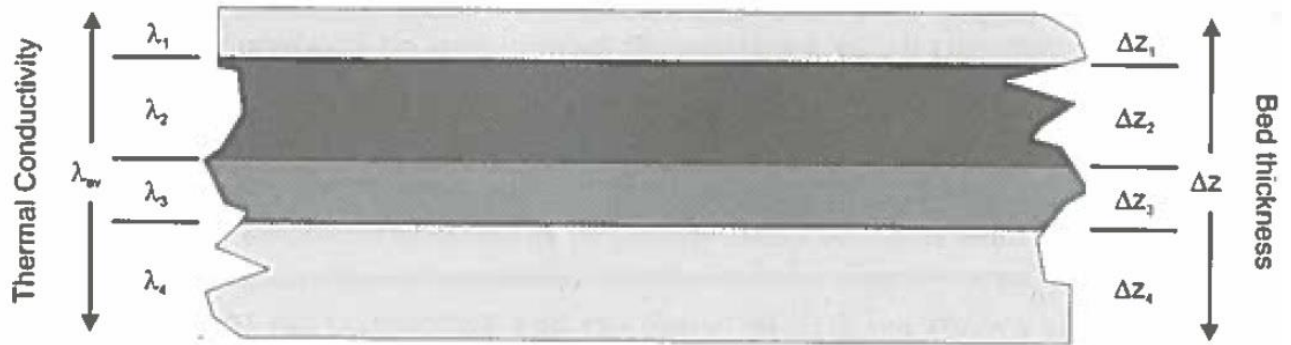
| | |
|-------|------|
| 93.5 | 904 |
| 94 | 908 |
| 94.5 | 912 |
| 95 | 916 |
| 95.5 | 920 |
| 96 | 924 |
| 96.5 | 928 |
| 97 | 932 |
| 97.5 | 936 |
| 98 | 940 |
| 98.5 | 944 |
| 99 | 948 |
| 99.5 | 952 |
| 100 | 956 |
| 100.5 | 960 |
| 101 | 964 |
| 101.5 | 968 |
| 102 | 972 |
| 102.5 | 976 |
| 103 | 980 |
| 103.5 | 984 |
| 104 | 988 |
| 104.5 | 992 |
| 105 | 996 |
| 105.5 | 1000 |
| 106 | 1004 |
| 106.5 | 1008 |
| 107 | 1012 |
| 107.5 | 1016 |
| 108 | 1020 |
| 108.5 | 1024 |
| 109 | 1028 |
| 109.5 | 1032 |
| 110 | 1036 |
| 110.5 | 1040 |
| 111 | 1044 |
| 111.5 | 1048 |
| 112 | 1052 |
| 112.5 | 1056 |
| 113 | 1060 |
| 113.5 | 1064 |
| 114 | 1068 |
| 114.5 | 1072 |
| 115 | 1076 |
| 115.5 | 1080 |
| 116 | 1084 |
| 116.5 | 1088 |
| 117 | 1092 |
| 117.5 | 1096 |
| 118 | 1100 |
| 118.5 | 1104 |

| | |
|-------|------|
| 119 | 1108 |
| 119.5 | 1112 |
| 120 | 1116 |
| 120.5 | 1120 |
| 121 | 1124 |
| 121.5 | 1128 |
| 122 | 1132 |
| 122.5 | 1136 |
| 123 | 1140 |
| 123.5 | 1144 |
| 124 | 1148 |
| 124.5 | 1152 |
| 125 | 1156 |
| 125.5 | 1160 |
| 126 | 1164 |
| 126.5 | 1168 |
| 127 | 1172 |
| 127.5 | 1176 |
| 128 | 1180 |
| 128.5 | 1184 |
| 129 | 1188 |
| 129.5 | 1192 |
| 130 | 1196 |
| 130.5 | 1200 |
| 131 | 1204 |
| 131.5 | 1208 |
| 132 | 1212 |
| 132.5 | 1216 |
| 133 | 1220 |
| 133.5 | 1224 |
| 134 | 1228 |
| 134.5 | 1232 |
| 135 | 1236 |
| 135.5 | 1240 |
| 136 | 1244 |
| 136.5 | 1248 |
| 137 | 1252 |
| 137.5 | 1256 |
| 138 | 1260 |
| 138.5 | 1264 |
| 139 | 1268 |
| 139.5 | 1272 |
| 140 | 1276 |
| 140.5 | 1280 |
| 141 | 1284 |
| 141.5 | 1288 |
| 142 | 1292 |
| 142.5 | 1296 |
| 143 | 1300 |
| 143.5 | 1304 |
| 144 | 1308 |

| | |
|-------|------|
| 144.5 | 1312 |
| 145 | 1316 |
| 145.5 | 1320 |
| 146 | 1324 |
| 146.5 | 1328 |
| 147 | 1332 |
| 147.5 | 1336 |
| 148 | 1340 |
| 148.5 | 1344 |
| 149 | 1348 |
| 149.5 | 1352 |
| 150 | 1356 |

Tab.4 Temperature vs Depth

Appendix: Harmonic Mean



$$\lambda_{av} = \Delta Z / [\Delta z_1/\lambda_1 + \Delta z_2/\lambda_2 + \Delta z_3/\lambda_3 + \Delta z_4/\lambda_4]$$

λ_i = thermal conductivity of i th bed

ϕ_i = fractional proportion

z_i = thickness of the i th bed

Z = total thickness of sequence

$$\frac{1}{\lambda_B} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{\lambda_i}$$

$$\frac{1}{\lambda_B} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\lambda_i}$$