STRUMENTI FINANZIARI DERIVATI

Anna Rita BACINELLO

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali, Matematiche e Statistiche "Bruno de Finetti", Università degli Studi di Trieste

STRUMENTI FINANZIARI DERIVATI

(derivati, "derivatives", "contingent-claims")

Si tratta di strumenti finanziari che generano dei flussi di cassa (pagamenti o "payoff" o “cash-flow”) dipendenti dal valore assunto da altre attività finanziarie o, più in generale, da una o più variabili osservabili ("variabili sottostanti")

$\Rightarrow$ anche il loro valore dipenderà da quello assunto dalle variabili sottostanti.

Possibili attività sottostanti: azioni, indici di Borsa, obbligazioni, titoli di stato, tassi d'interesse, merci, valute, derivati, ...

Principali derivati: contratti a termine ("forward"), contratti "futures", swaps, opzioni standard ("covered warrant"), opzioni "esotiche", ...,

contratto di assicurazione, azienda, "cat. bonds", ...

IPOTESI DI LAVORO

- agenti razionali e non saziati (⇒ massimizzatori di profitto)
- agenti "price-takers"
- mercati aperti in tempo continuo (salvo diversamente specificato)
- perfetta divisibilità dei beni
- assenza di tasse e di costi di transazione
- sono ammesse le vendite allo scoperto (*"shortselling"*), cioè le vendite di beni di cui non si ha la proprietà, senza alcun tipo di vincolo, per tutti i beni oggetto di scambio
- assenza di opportunità di arbitraggio (AOA, ipotesi "chiave"), cioè (intuitivamente) impossibilità di realizzare profitti senza rischio mediante operazioni di compravendita di beni sul mercato (⇒ ai prezzi di mercato)

Def.: I prezzi di mercato consentono di realizzare opportunità di arbitraggio se è possibile intraprendere delle operazioni di compravendita di beni che comportano dei flussi monetari, in generale aleatori, tutti ≥ 0 con probabilità $=1$ (q.c., *quasi certamente*), ed uno almeno di essi > 0 con probabilità > 0.

Formalmente, un'operazione di compravendita ("transazione") che inizia all'epoca $t_0 = 0$ e produce la sequenza di flussi in entrata $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ alle epoche $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ (con $t_0 < t_1 < ... < t_n$) è un'opportunità di arbitraggio se

$$\begin{cases} \mathrm{P}\left(x_i \geq 0\right)=1 \quad \forall i \in \{0,1,...,n\} \\ \exists i \in \{0,1,...,n\} : \mathrm{P}\left(x_i > 0\right) > 0 \end{cases}$$

Poiché il flusso all'epoca iniziale t_0 è noto, si è in grado di dire se esso è = 0 o > 0. In base a ciò si usa allora distinguere tra

1. Opportunità di arbitraggio del I tipo: $$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \mathrm{P}\left(x_i \geq 0\right)=1 \quad \forall i \in \{1,...,n\} \\ \exists i \in \{1,...,n\} : \mathrm{P}\left(x_i > 0\right) > 0 \end{cases}$$

2. Opportunità di arbitraggio del II tipo: $$\begin{cases} x_0 > 0 \\ \mathrm{P}\left(x_i \geq 0\right)=1 \quad \forall i \in \{1,...,n\} \end{cases}.$$

Nella maggior parte dei casi considereremo operazioni finanziarie che coinvolgono solo due date. In particolare, con riferimento ad una transazione che prevede un flusso iniziale all'epoca t_0 e un unico flusso futuro all'epoca t_1 (cioè $n=1$), indicando con $c_0=-x_0$ il costo iniziale dell'operazione, si ha:

1. Opportunità di arbitraggio del I tipo: $\begin{cases} c_0 = 0 \\ \mathrm{P}(x_1 \geq 0)=1 \\ \mathrm{P}(x_1 > 0) > 0 \end{cases}$

2. Opportunità di arbitraggio del II tipo: $\begin{cases} c_0 < 0 \\ \mathrm{P}(x_1 \geq 0)=1 \end{cases}$.

- nel mercato viene scambiata (almeno) un'attività rischiosa (che sarà appunto la variabile sottostante dei derivati considerati nel seguito), insieme ad attività prive di rischio. Più precisamente, assumiamo che siano scambiati titoli a cedola nulla ("zero-coupon bonds") non rischiosi con qualunque scadenza, così come un conto di deposito non rischioso ("money-market account" o "bank account", o "deposit account")

$\Rightarrow$ La possibilità di vendere allo scoperto attività prive di rischio, cioè di indebitarsi al tasso "*risk-free*", implica coincidenza tra tasso creditore e tasso debitore.

TITOLI A CEDOLA NULLA

Indichiamo con $b(t,T)$ il prezzo di mercato al tempo $t \geq 0$ di un titolo a cedola nulla unitario con scadenza $T \geq t$, che paga un importo certo, pari ad 1€, a scadenza.

OSSERVAZIONE: AOA $\Rightarrow$ $\begin{cases} b(t,T) > 0 \quad \forall t,T: \ t < T \\ b(T,T) = 1 \quad \forall T \end{cases}$.

Assumiamo che i tassi d'interesse siano strettamente positivi (ipotesi non implicata da AOA), cioè che $b(t,T) < 1 \quad \forall t,T: \ t < T$. Ciò comporta che, ad ogni fissato istante t, $b(t,T)$ è strettamente decrescente rispetto alla scadenza T. Si osservi, tuttavia, che per una fissata scadenza T, $\{b(t,T), \ 0 \leq t \leq T\}$ costituisce un *processo stocastico*, cosicché nessun tipo di monotonia rispetto a t può essere garantita; quindi un repentino aumento dei tassi d'interesse tra t ed s potrebbe far sì che $b(s,T) < b(t,T)$ se $t < s(< T)$ pur essendo i tassi positivi.

TASSI IMPLICATI DALLA STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI DEI TITOLI A CEDOLA NULLA $\Rightarrow$ Struttura per scadenza dei tassi a pronti

Intensità risk-free $r(t,T)$:

$$b(t,T)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)}=1 \quad \Rightarrow \quad r(t,T)=-\frac{1}{T-t}\ln b(t,T).$$

Naturalmente, se la scadenza T è fissata, $\{r(t,T),\ 0\le t\le T\}$ costituisce un processo stocastico.

Tasso annuo risk-free $i(t,T)$:

$$b(t,T)\big(1+i(t,T)\big)^{T-t}=1 \quad \Rightarrow \quad i(t,T)=b(t,T)^{-\frac{1}{T-t}}-1=\mathrm{e}^{r(t,T)}-1.$$

Tasso semplice (o Lineare) risk-free $L(t,T)$ (spesso usato nella pratica quando $T-t$ è inferiore all'anno):

$$b(t,T)\big(1+L(t,T)(T-t)\big)=1 \quad \Rightarrow \quad L(t,T)=\frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{b(t,T)}-1\right).$$

MONEY-MARKET ACCOUNT

Indichiamo con $r(t)$ il "tasso" (intensità) istantaneo risk-free al tempo $t \geq 0$, che viene applicato ad un investimento (o indebitamento) che inizia in t e termina "un istante dopo", e con $B(t)$ il valore del money-market account al tempo $t \geq 0$, che restituisce il montante di una strategia di "roll-over" al tasso istantaneo risk-free:

$$r(t) = \lim_{T \to t} r(t,T) = -\left[\frac{\partial}{\partial T} \ln b(t,T) \right]_{T=t}, \qquad \begin{cases} \mathrm{d}B(t) = r(t)B(t)\mathrm{d}t \\ B(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}.$$

Spesso si assume per semplicità che i tassi d'interesse siano deterministici e costanti nel tempo, cioè che $r(t,T) \equiv r \;\; \forall t,T: \; 0 \leq t \leq T$ e quindi $r(t) \equiv r \;\; \forall t \geq 0$. In tal caso è praticamente irrilevante distinguere tra titoli a cedola nulla e money-market account, in quanto $b(t,T) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}$ è il fattore di attualizzazione per il periodo $[t,T]$ e $B(t) = \mathrm{e}^{rt}$ è il fattore di capitalizzazione per il periodo $[0,t]$ nel regime esponenziale con intensità r.

Nel seguito useremo quasi sempre titoli a cedola nulla per costruire delle strategie e solo poche volte, in particolare verso la fine, il money-market account.

CONTRATTI FORWARD/FUTURES
(definizione comune)

Un contratto forward/futures è un accordo in base al quale due contraenti pattuiscono di scambiarsi un certa quantità di un bene prefissato (*attività sottostante*) ad una data futura prefissata (*data di consegna* o *"delivery date"*), ad un prezzo prefissato al momento della stipula (*prezzo di consegna* o *"delivery price"*). Al momento dell'accordo non si paga nulla (salvo eventualmente un margine di garanzia), al momento della consegna <u>entrambi i contraenti devono adempiere agli impegni presi</u>. In particolare la parte venditrice (che è in *posizione "corta"*) deve consegnare il bene sottostante, mentre la parte acquirente (*posizione "lunga"*) deve pagare il prezzo di consegna.

<u>Differenze fra contratti forward e futures</u>

<u>I forward sono accordi privati</u>, trattati nei mercati non regolamentati ("Over The Counter", OTC), <u>i futures sono trattati in Borsa</u> ($\Rightarrow$ standardizzati, margini, Clearing House, ...), ..., <u>meccanismo del *"marking to market*</u>".

<u>Analogie fra contratti forward e futures</u>

definizione comune, finalità comuni, <u>importante teorema che lega i due tipi di contratto</u>

FINALITA' CHE POSSONO INDURRE A STIPULARE CONTRATTI FORWARD/FUTURES

- copertura da un rischio (*"hedging"*)
- "speculazione"

(Esempi di copertura)

⇒ Aspettative/timori dei contraenti, ininfluenza del fatto che vi sia o meno effettiva consegna

⇒ I contratti forward permettono di ottenere una copertura "su misura", nel caso dei futures la copertura è generalmente imperfetta (*"basis risk"*)

(Esempi di speculazione)

⇒ "Effetto leva" nel caso in cui si assumono posizioni su contratti forward/futures anziché operare direttamente sui mercati a pronti

CONTRATTI FORWARD

Notazione:

0	data di stipulazione del contratto
T	data di consegna
K	prezzo di consegna
$\{S(t); t \geq 0\}$	processo stocastico del prezzo del bene sottostante
$\{V^L(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del valore del contratto forward per il compratore ("long forward")
$\{V^S(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del valore del contratto forward per il venditore ("short forward")

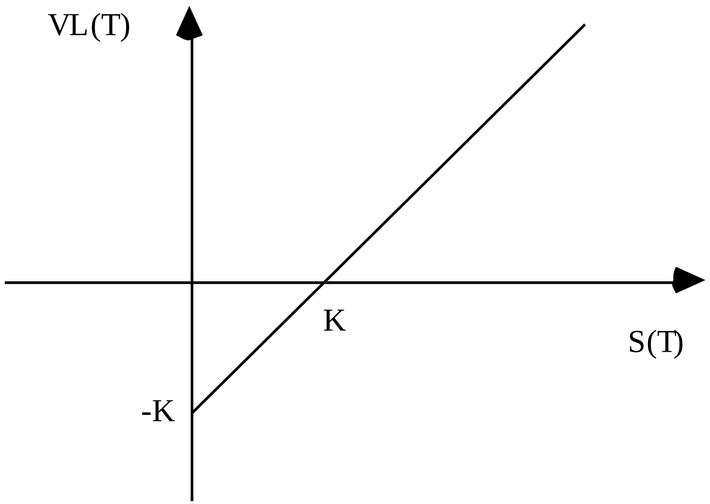
PAYOFF (VALORE FINALE) DI UN CONTRATTO FORWARD

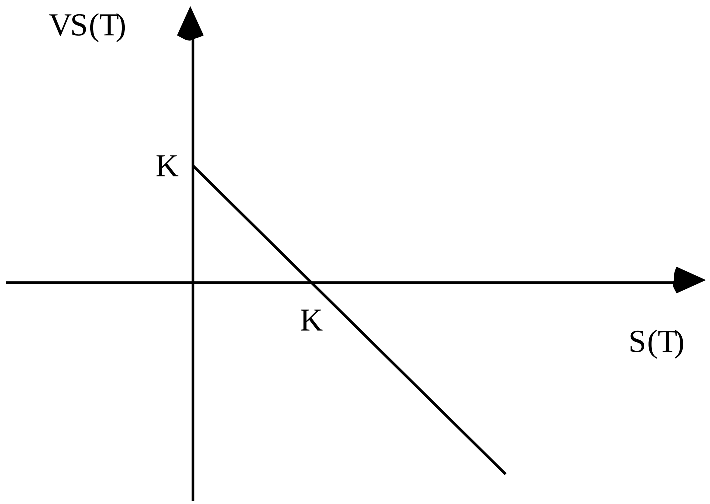
L'assenza di tasse e di costi di transazione, e l'assenza di opportunità di arbitraggio, implicano:

$$V^L(t)+V^S(t)=0 \quad \forall t\in[0,T]$$

$$V^L(0)=V^S(0)=0$$

$$V^L(T)=S(T)-K, \qquad V^S(T)=K-S(T)$$





(Margini)

DEFINIZIONE DI PREZZO FORWARD

Si definisce prezzo forward in t $(0 \le t \le T)$ quel particolare prezzo di consegna che renderebbe nullo, in t, il valore del contratto (long o short).

Notazione:

$\{F(t,T); 0 \le t \le T\}$ processo stocastico dei prezzi forward

$\Rightarrow \quad F(T,T) = S(T)$ (in quanto $V^L(T) = S(T) - K = 0 \iff K = S(T)$)

$\Rightarrow \quad K = F(0,T)$ (in 0 il contratto deve avere valore nullo per l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio)

Come si determina $F(t,T)$ per $t < T$ e, in particolare, $F(0,T)$?

N.B.: nel caso dei contratti forward ha interesse pratico soltanto il prezzo forward in 0; nel caso dei contratti futures verrà analogamente definito un prezzo future, e questo avrà interesse operativo in ogni t. Un teorema fondamentale che lega prezzi futures e prezzi forward fra loro ci consentirà di estendere i risultati che stiamo per ottenere con riferimento ai contratti forward (molto facili da analizzare) anche ai contratti futures.

CONTRATTO FORWARD SU UN BENE CHE NON PRODUCE REDDITI NE' RICHIEDE COSTI (ALMENO) FINO ALLA DATA DI CONSEGNA

$$V^L(t) = S(t) - Kb(t,T), \qquad 0 \le t \le T \qquad \text{(a1)}$$

$$V^S(t) = -V^L(t), \qquad 0 \le t \le T$$

$$F(t,T) = \frac{S(t)}{b(t,T)} = S(t)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T \qquad \text{(a2)}$$

In particolare:

$$K = F(0,T) = \frac{S(0)}{b(0,T)} = S(0)\mathrm{e}^{rT}, \quad \text{con } r \doteq r(0,T)$$

<u>**Osservazione**</u>: La (a2) scende immediatamente dalla (a1) e dalla definizione di prezzo forward. Infatti

$$V^L(t) = S(t) - Kb(t,T) = 0 \iff K = \frac{S(t)}{b(t,T)} \ .$$

Essa, tuttavia, potrebbe anche essere ricavata direttamente, ragionando per assurdo e sfruttando, in particolare, l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio.

<u>Dim. della (a1)</u>.

Si considerino, in $t < T$, i seguenti due portafogli.

<u>Portafoglio A</u>:

- un contratto forward in posizione lunga ("long forward"), stipulato in 0, con data di consegna T e prezzo di consegna K.

<u>Portafoglio B</u>:

- il bene sottostante il contratto forward;
- una posizione corta (debito) su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T.

A e B hanno lo stesso valore finale (in T):

$$V_A(T) = V^L(T) = S(T) - K = V_B(T),$$

e non producono alcun flusso di cassa prima di T.

$\Rightarrow$ AOA implica che A e B devono avere lo stesso valore in ogni istante precedente T:

$$V_A(t) = V_B(t) \ \ \forall t \in [0,T], \quad \text{cioè} \quad V^L(t) = S(t) - Kb(t,T) \ \ \forall t \in [0,T].$$

<u>N.B.</u>: Un contratto forward è un'attività *ridondante*, in quanto può essere replicato tramite un portafoglio costituito dalle attività di base (attività sottostante e titoli risk-free)

CASI PARTICOLARI

- L'attività sottostante è un titolo a cedola nulla unitario con scadenza $s > T$:

$$\Rightarrow \quad S(t) = \begin{cases} b(t,s) & \text{se } t \le s \\ 0 & \text{se } t > s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = b(t,s) - Kb(t,T), \quad 0 \le t \le T$$

$$\Rightarrow \quad F(t,T) = \frac{b(t,s)}{b(t,T)} \doteq b(t,T,s), \qquad 0 \le t \le T$$ (prezzo forward del titolo a cedola nulla).

- Forward Rate Agreement (FRA): Viene definito come un accordo tra due parti per un prestito differito. Una parte (in posizione long) riceverà un importo monetario, indicato con N, in una data futura T, e restituirà lo stesso importo, maggiorato degli interessi al tasso prefissato k e calcolati in regime di interesse semplice, al tempo $s > T$. Al momento dell'accordo non si paga nulla.

  Poiché l'importo N può essere immediatamente investito al tempo T per il periodo $[T, s]$ in base alle condizioni prevalenti di mercato, ovvero al tasso a pronti $L(T, s)$, spesso nella pratica non c'è scambio di capitale fra le parti ma soltanto scambio di interessi sul capitale nominale di riferimento N e per il periodo $[T, s]$: la parte in posizione long paga gli interessi al tasso fisso k, l'altra al tasso "variabile" $L(T, s)$.

  $\Rightarrow$ La variabile sottostante è il tasso $L(T, s)$ (tasso Libor, o Euribor)

  $\Rightarrow$ Anche se la "data di consegna" è s, poiché $L(T, s)$ è desunto dal prezzo del titolo a cedola nulla $b(T, s)$ (in regime di interesse semplice), il payoff finale è noto già al tempo T.

<u>Payoff finale</u> di un “long FRA” in s: $\quad FRA^L(s) = N(s-T)\big(L(T,s)-k\big)$.

Ricordando che $L(T,s) = \dfrac{1}{s-T}\left(\dfrac{1}{b(T,s)}-1\right)$

$$\Rightarrow \qquad FRA^L(s) = N\left[\frac{1}{b(T,s)} - \big(1+k(s-T)\big)\right].$$

Poiché $FRA^L(s)$ è già noto in T, il suo valore al tempo T è

$$\Rightarrow \qquad FRA^L(T) = FRA^L(s)b(T,s) = N\Big[1-\big(1+k(s-T)\big)b(T,s)\Big]$$

$$= N\big(1+k(s-T)\big)\left[\frac{1}{1+k(s-T)} - b(T,s)\right],$$

che corrisponde al payoff finale di $N\big(1+k(s-T)\big)$ posizioni corte in contratti forward, tutti con data di consegna T, prezzo di consegna $K = \dfrac{1}{1+k(s-T)}$ e variabile sottostante un titolo a cedola nulla unitario di scadenza s.

Per $t \leq T$ abbiamo quindi:

$$\Rightarrow \qquad FRA^L(t) = N\big(1+k(s-T)\big)V^S(t) = N\big(1+k(s-T)\big)\big[Kb(t,T)-b(t,s)\big]$$

$$= N\big(1+k(s-T)\big)\left[\frac{1}{1+k(s-T)}b(t,T)-b(t,s)\right],$$

da cui si ottiene il <u>tasso forward</u> k che rende $FRA^L(t)=0$:

$$\Rightarrow \qquad k \doteq L(t,T,s) = \frac{1}{s-T}\left(\frac{b(t,T)}{b(t,s)}-1\right) = \frac{1}{s-T}\left(\frac{1}{b(t,T,s)}-1\right).$$

<u>**N.B.**</u>: $L(t,T,s)$ è il tasso forward implicato dalla struttura per scadenza dei prezzi forward dei titoli a cedola nulla (<u>in regime di interesse semplice</u>):

$$b(t,T,s)\big(1+L(t,T,s)(s-T)\big)=1.$$

Analogamente, si possono ricavare gli altri tassi forward:

$$r(t,T,s)=-\frac{1}{s-T}\ln b(t,T,s)$$ (<u>intensità annua forward</u>)

$$i(t,T,s)=b(t,T,s)^{-\frac{1}{s-T}}-1=\mathrm{e}^{r(t,T,s)}-1$$ (<u>tasso annuo forward composto</u>)

$$r^{f}(t,T)=\lim_{s\to T} r(t,T,s)=-\frac{\partial}{\partial T}\ln b(t,T)$$ (<u>intensità forward istantanea</u>)

- Swap su tassi d'interesse (IRS): E' un portafoglio di forward rate agreements (se long $\Rightarrow$ *payer swap*, se short $\Rightarrow$ *receiver swap*) con *settlement dates* (cioè date di pagamento interessi) $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ e *reset dates* (cioè date in cui il tasso variabile diventa noto) $\{t_{i-1}\}_{i=1}^{n}$, dove $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ e $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. Tutti i FRA hanno lo stesso capitale nominale N e lo stesso tasso fisso k.

  Valore al tempo $t_0 = 0$ di un payer swap:

$$\Rightarrow \quad SWAP^P(t_0) = \sum_{i=1}^{n} FRA^L(t_0, t_{i-1}, t_i) = N(1+k\Delta)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+k\Delta} b(t_0, t_{i-1}) - b(t_0, t_i)\right]$$

$$= N\left[1 - b(t_0, t_n) - k\Delta \sum_{i=1}^{n} b(t_0, t_i)\right]$$

  (con un'ovvia modifica nella notazione dei valori dei singoli FRA).

  N.B.: Il tasso fisso k è lo stesso per tutti i FRA, quindi non può coincidere con tutti i tassi forward $L(t_0, t_{i-1}, t_i)$. Di conseguenza ciascun FRA può avere valore diverso da 0 (sia positivo che negativo), ma lo swap è di solito strutturato in modo tale da avere un valore iniziale (complessivo) nullo.

In particolare, il tasso fisso k che rende $SWAP^P(t_0)=0$ si chiama tasso swap (in t_0). Si ha pertanto:

$$\Rightarrow \quad k \doteq L^{SWAP}(t_0)=\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1-b(t_0,t_n)}{\sum_{i=1}^{n} b(t_0,t_i)} \; .$$

Con alcuni semplici passaggi algebrici si ottiene

$$\Rightarrow \quad L^{SWAP}(t_0)=\sum_{i=1}^{n} w_i L(t_0,t_{i-1},t_i),$$

cioè il tasso swap è una media aritmetica ponderata dei tassi forward $L(t_0,t_{i-1},t_i)$, con pesi $w_i=\dfrac{b(t_0,t_i)}{\sum_{j=1}^{n} b(t_0,t_j)}$, $i=1,2,\ldots,n$.

CONTRATTO FORWARD SU UN BENE CHE PRODUCE "DIVIDENDI" CERTI

Si supponga ora che gli eventuali redditi (“dividendi”) generati dal possesso dell’attività sottostante tra 0 e T siano noti in anticipo, sia come importi che come date di pagamento.

Notazione:

$D(t,T)$ valore al tempo t di tutti i dividendi pagati dall’attività sottostante tra t e T

Ad esempio, se gli importi $\{d_i\}_{i=1}^n$ sono pagati ai tempi $\{t_i\}_{i=1}^n$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$, si ha

$$D(t,T) = \begin{cases} \sum_{t_i > t} d_i b(t,t_i) & \text{se } t \le t_n \\ 0 & \text{se } t > t_n \end{cases};$$

se invece non ci sono dividend tra 0 e T, allora $D(t,T) = 0$ per ogni $t \le T$.

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = \big(S(t) - D(t,T)\big) - Kb(t,T), \qquad 0 \le t \le T \tag{b1}$$

$$\Rightarrow \quad F(t,T) = \frac{S(t) - D(t,T)}{b(t,T)} = \big(S(t) - D(t,T)\big)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T \tag{b2}$$

In particolare: $K = F(0,T) = \dfrac{S(0) - D(0,T)}{b(0,T)} = \big(S(0) - D(0,T)\big)\mathrm{e}^{rT}$, con $r \doteq r(0,T)$.

Dim. della (b1): esattamente come prima, salvo considerare, al posto del Portafoglio B, il seguente

Portafoglio C:

- il bene sottostante il contratto forward;
- una posizione corta su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T;
- tante posizioni corte (debiti) su titoli a cedola nulla quante sono le date di pagamento dei dividendi, ciascuna con scadenza e valore nominale coincidenti con data di distribuzione del dividendo e relativo importo.

Anche in questo caso A e C hanno lo stesso valore finale, pari a $S(T)-K$, e non producono alcun flusso netto di cassa prima di T. Infatti il possessore di C utilizzerà i dividendi via via percepiti per rimborsare i titoli a cedola nulla corrispondenti.

CONTRATTO FORWARD SU UNA MERCE CHE RICHIEDE COSTI DI MAGAZZINO CERTI (sia come importi, che come date di pagamento)

<u>Notazione</u>:

$A(t,T)$ valore in t di tutti i costi derivanti dal possesso del bene sottostante fra t e T

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = \big(S(t) + A(t,T)\big) - Kb(t,T), \qquad 0 \le t \le T \qquad \text{(c1)}$$

$$\Rightarrow \quad F(t,T) = \frac{S(t) + A(t,T)}{b(t,T)} = \big(S(t) + A(t,T)\big)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T \qquad \text{(c2)}$$

In particolare: $K = F(0,T) = \dfrac{S(0) + A(0,T)}{b(0,T)} = \big(S(0) + A(0,T)\big)\mathrm{e}^{rT}$, con $r \doteq r(0,T)$.

<u>Dim. della (c1)</u>: come prima, salvo considerare, al posto del Portafoglio C, il seguente <u>Portafoglio D</u>:

- il bene sottostante il contratto forward;
- una posizione corta su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T;
- tanti titoli a cedola nulla (in posizione lunga) quante sono le date di pagamento dei costi di magazzino, ciascuno con scadenza e valore nominale "corrispondenti".

Anche in questo caso A e D hanno lo stesso valore finale, pari a $S(T) - K$, e non producono alcun <u>flusso netto</u> di cassa prima di T. Infatti il possessore di D utilizzerà i titoli in scadenza per pagare via via i costi di magazzino.

CONTRATTO FORWARD SU UN BENE CHE PRODUCE DIVIDENDI NEL CONTINUO

Supponiamo ora che

(i) il bene sottostante produca dividendi nel continuo;

(ii) tali dividendi vengano via via utilizzati per acquistare quantità addizionali del bene stesso;

(iii) i dividendi pagati dal bene sottostante in ogni fissato intervallo di tempo siano proporzionali al valore del bene all'inizio dell'intervallo e all'ampiezza dello stesso, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo rispetto a tale ampiezza

<u>Notazione</u>:

$d(t,t+\Delta t)$	dividendi prodotti da una quantità unitaria di bene sottostante nell'intervallo di tempo $(t,t+\Delta t)$
$q\ \ (>0)$	intensità di dividendo
$n(t)$	quantità di bene sottostante disponibile al tempo t

Formalizzando la (iii) si ha: $d(t,t+\Delta t) = qS(t)\Delta t + o(\Delta t)$, con $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Tenendo conto delle ipotesi (i)-(iii) si ha inoltre: $n(T) = n(t)\mathrm{e}^{q(T-t)}$

$\Rightarrow$ La quantità di bene disponibile evolve come il montante nel regime esponenziale con intensità q.

Si consideri allora il seguente

Portafoglio E:

- $n(t) = \mathrm{e}^{-q(T-t)}(<1)$ unità di bene sottostante;
- una posizione corta su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T.

E non produce alcun flusso netto di cassa prima di T, in quanto i dividendi vengono utilizzati per comprare bene sottostante. In T la disponibilità di bene è pari a $n(T) = 1$, di valore $S(T)$.

$\Rightarrow$ Anche in questo caso A ed E hanno lo stesso valore finale, non producono flussi di cassa intermedi, e quindi devono avere lo stesso prezzo in ogni istante

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} - Kb(t,T), \quad F(t,T) = \frac{S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}}{b(t,T)} = S(t)\mathrm{e}^{(r(t,T)-q)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T.$$

In particolare: $$K = F(0,T) = \frac{S(0)\mathrm{e}^{-qT}}{b(0,T)} = S(0)\mathrm{e}^{(r-q)T}, \qquad \text{con } r \doteq r(0,T)$$

<u>Casi particolari</u>

- contratti forward su valuta estera (q= intensità d'interesse nel paese estero);
- contratti forward su indici azionari o su fondi comuni d'investimento.

CONTRATTO FORWARD SU UN BENE CHE RICHIEDE COSTI NEL CONTINUO

Supponiamo che

(i) il possesso del bene sottostante richieda costi da sostenere nel continuo, con intensità $a\ (>0)$;

(ii) tali costi siano pagati "in natura", cedendo via via quantità di bene.

In tal caso $\qquad n(T) = n(t)\mathrm{e}^{-a(T-t)}$

$\Rightarrow$ La quantità di bene disponibile evolve come il valore attuale nel regime esponenziale con intensità a.

$\Rightarrow$ Il secondo portafoglio sarà costituito da $n(t) = \mathrm{e}^{a(T-t)} (>1)$ unità di bene sottostante (oltre alle posizioni corte su K titoli a cedola nulla con scadenza T).

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = S(t)\mathrm{e}^{a(T-t)} - Kb(t,T), \qquad F(t,T) = \frac{S(t)\mathrm{e}^{a(T-t)}}{b(t,T)} = S(t)\mathrm{e}^{(r(t,T)+a)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T$$

In particolare: $$K = F(0,T) = \frac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)} = S(0)\mathrm{e}^{(r+a)T}, \qquad \text{con } r \doteq r(0,T)$$

RIMOZIONE DI ALCUNE IPOTESI DI LAVORO

Come si è visto, le ipotesi di lavoro precedentemente introdotte sono molto potenti, e ci consentono di determinare in maniera precisa il prezzo forward e il valore di un contratto forward semplicemente "osservando" il prezzo corrente di mercato del bene sottostante, senza bisogno di fare alcun tipo di ipotesi sull'evoluzione futura di quest'ultimo. Purtroppo non sarà invece così per le opzioni. Tutte le ipotesi introdotte concorrono all'ottenimento di questi risultati. Se si rimuove una sola di esse, anche il prezzo forward non potrà più essere individuato in maniera precisa.

A titolo di esempio, supponiamo che quando si vendono allo scoperto titoli a cedola nulla il ricavato risulti minore del costo che sarebbe invece richiesto per comprarli, cosicché il <u>tasso debitore</u> (r_d) (implicato dal valore al tempo t di un titolo a cedola nulla di scadenza T venduto allo scoperto) risulta <u>maggiore del corrispondente tasso creditore</u> (r_c), come avviene nella pratica. In tal caso si avrà, con riferimento al contratto forward su un bene che non produce redditi né richiede costi:

$$S(t)\mathrm{e}^{r_c(T-t)} \leq F(t,T) \leq S(t)\mathrm{e}^{r_d(T-t)},\ 0 \leq t \leq T \qquad \text{(dim. per assurdo)}$$

$\Rightarrow$ intervallo di valori in cui deve cadere il prezzo forward onde evitare opportunità di arbitraggio

Se, inoltre, si introducono tasse, costi di transazione, vincoli sulle vendite allo scoperto, ..., l'intervallo si "allarga".

CONTRATTI FUTURES

Analogie con i contratti forward

- definizione del contratto
- finalità
- definizione di *prezzo futures*, come quel particolare prezzo di "consegna" che rende nullo, in $t \in [0,T]$, il valore del contratto.

Notazione:

$\{ f(t,T); 0 \leq t \leq T \}$ processo stocastico dei prezzi futures

- Anche qui si parte da un "prezzo di consegna" pari al prezzo futures iniziale:

$$K = f(0,T),$$

e alla scadenza il prezzo futures coincide con il prezzo a pronti:

$$f(T,T) = S(T).$$

Differenze dai contratti forward

- i contratti futures sono trattati in Borsa, e quindi sono standardizzati sia nella quantità che nel tipo di bene sottostante, e nella durata;
- la standardizzazione potrebbe comportare del "basis risk" quando i futures sono usati per motivi di copertura;
- il rapporto contrattuale nei contratti futures è gestito da una stanza di compensazione ("Clearing House"), organismo di controllo che, agendo come intermediario in tutte le transazioni su futures, garantisce la corretta esecuzione del contratto e sovrintende alla formazione dei prezzi futures, fissati giornalmente;
- il rischio di insolvenza tra le parti è praticamente assente, per la presenza dei margini;
- raramente ha luogo la consegna del bene sottostante, bensì viene regolata in contanti la differenza fra $f(T,T)$ ed $f(0,T)$;
- raramente il contratto viene portato fino a scadenza, bensì viene chiuso prima assumendo una posizione opposta (a costo nullo);
- nei rari casi in cui è prevista la consegna del bene sottostante, di solito non viene stabilita una precisa data di consegna, bensì un intero mese di consegna (*"delivery month"*), ed è la parte venditrice che ha diritto di scegliere, nell'ambito di questo mese, la data precisa in cui effettuare la consegna (*"delivery option"*). Tuttavia, siccome le ipotesi di lavoro precedentemente introdotte consentono, nella maggior parte dei casi, di stabilire, a seconda del bene sottostante, quando è ottimale consegnare, ciò diviene irrilevante in quanto si considera come data di consegna proprio quella ottimale.

MECCANISMO DEL *"MARKING-TO-MARKET"*

La differenza $f(T,T)-f(0,T)$ a chi è in posizione lunga (o $f(0,T)-f(T,T)$ a chi è in posizione corta), <u>anziché</u> venir regolata <u>in blocco</u>, <u>alla scadenza</u> T, viene <u>regolata giorno per giorno</u>.

Supponendo di misurare il tempo in giorni, e che T sia un intero, alla fine di ogni giornata (cioè in $t=1,2,...,T$) vengono regolate le seguenti differenze:

$f(1,T)-f(0,T),\;\; f(2,T)-f(1,T),\;\; ...,\;\; f(T,T)-f(T-1,T)$ "long futures"

$f(0,T)-f(1,T),\;\; f(1,T)-f(2,T),\;\; ...,\;\; f(T-1,T)-f(T,T)$ "short futures"

Anche se la somma algebrica di tali differenze coincide con $f(T,T)-f(0,T)$ per il long futures (e con $f(0,T)-f(T,T)$ per lo short), in realtà esse vengono investite in attività prive di rischio, per cui il loro montante in T è in generale diverso.

Se c'è <u>consegna fisica</u> al tempo T piuttosto che regolamento in contanti, la parte in posizione lunga paga $f(T-1,T)$ (anziché $f(0,T)$) e riceve il bene sottostante.

⇒ Questo meccanismo realizza un <u>aggiornamento</u> giornaliero del "<u>prezzo di consegna</u>", di modo che il <u>contratto ha valore nullo al termine di ogni giornata</u> di contrattazione.

⇒ E' proprio grazie ad esso che si può <u>entrare in un contratto già in essere</u> (<u>al prezzo futures corrente</u>) in ogni momento <u>senza pagar nulla</u>.

UGUAGLIANZA TRA PREZZI FORWARD E PREZZI FUTURES

<u>Teorema</u>: *Sotto le ipotesi di lavoro precedentemente enunciate e, inoltre, sotto l'ipotesi che i prezzi dei titoli a cedola nulla con scadenza T siano <u>deterministici</u>, si ha* $f(t,T)=F(t,T)$, $t=0,1,\dots,T$ (nonostante il meccanismo del marking to market).

<u>Dim.</u>: Sappiamo già che $f(T,T)=F(T,T)\ (=S(T))$. Prima di dimostrare che tale relazione vale anche per $t=0,1,\dots,T-1$, descriviamo la seguente strategia dinamica su futures, che inizia in un fissato istante t $(t=0,1,\dots,T-1)$ e termina in T.

data	cash-flow generato	valore in T	nuove posizioni long	pos. totali
t			$b(t+1,T)$	$b(t+1,T)$
$t+1$	$[f(t+1,T)-f(t,T)]b(t+1,T)$	$f(t+1,T)-f(t,T)$	$b(t+2,T)-b(t+1,T)$	$b(t+2,T)$
$t+2$	$[f(t+2,T)-f(t+1,T)]b(t+2,T)$	$f(t+2,T)-f(t+1,T)$	$b(t+3,T)-b(t+2,T)$	$b(t+3,T)$
…	…	…	…	…
$T-1$	$[f(T-1,T)-f(T-2,T)]b(T-1,T)$	$f(T-1,T)-f(T-2,T)$	$1-b(T-1,T)$	1
T	$f(T,T)-f(T-1,T)$	$f(T,T)-f(T-1,T)$		

Tale strategia non richiede costi, perché le nuove posizioni su futures sono a costo nullo (si entra infatti al prezzo futures corrente), e non produce flussi di cassa intermedi perché i cash-flow generati dalle posizioni futures vengono immediatamente usati per comprare/vendere allo scoperto titoli a cedola nulla con scadenza T. Il cash-flow finale, in T, è quindi dato dal valore di rimborso netto di tutti questi titoli, pari a $\left[f(T,T)-f(t,T)\right]$.

N.B.: (quasi) tutte le ipotesi sono state sfruttate per costruire la strategia, ad es. possibilità di vendite allo scoperto, perfetta divisibilità dei titoli, …, prezzi dei bond deterministici (altrimenti non sarebbe possibile, ai tempi $t,\ldots,T-2$, assumere un numero di posizioni pari ai prezzi futuri $b(t+1,T),\ldots,b(T-1,T)$).

Ai fini della dimostrazione del teorema fondamentale, si considerino, in t $(=0,1,\ldots,T-1)$, i seguenti due portafogli.

Portafoglio A:

- strategia appena descritta;
- $f(t,T)$ titoli a cedola nulla unitari con scadenza T (in posizione lunga).

Portafoglio B:

- una posizione lunga su un nuovo contratto forward (quindi con $K=F(t,T)$);
- $F(t,T)$ titoli a cedola nulla unitari con scadenza T (in posizione lunga).

$\Rightarrow$ A e B non generano flussi netti di cassa prima di T;

inoltre in T hanno lo stesso valore finale:

$$V_A(T) = \left[f(T,T) - f(t,T) \right] + f(t,T) = f(T,T) = S(T)$$

$$V_B(T) = \left[F(T,T) - F(t,T) \right] + F(t,T) = F(T,T) = S(T)$$

$\Rightarrow$ Per evitare opportunità di arbitraggio, anche in t devono avere lo stesso valore:

$$V_A(t) = 0 + f(t,T)b(t,T) = f(t,T)b(t,T),$$

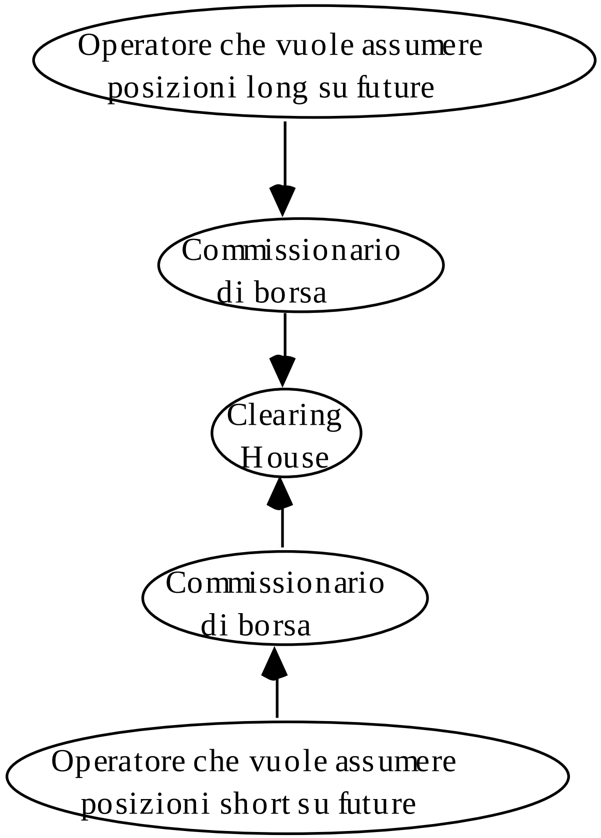
$$V_B(t) = 0 + F(t,T)b(t,T) = F(t,T)b(t,T),$$

quindi, essendo $b(t,T) > 0$, si ha $f(t,T) = F(t,T)$ (cioè la tesi).

N.B.: In tutto ciò è cruciale l'ipotesi che i prezzi dei titoli a cedola nulla siano deterministici (non solo per la dimostrazione), perché è possibile trovare degli esempi con prezzi stocastici in cui $f(t,T) \neq F(t,T)$.

I MARGINI NEI CONTRATTI FUTURES

Come già detto, i contratti futures sono trattati esclusivamente in Borsa. Ad essi si accede attraverso una rete di intermediari. Nel caso più semplice, in cui ci si rivolga direttamente a commissionari di borsa che siano anche membri della Clearing House, i passaggi sono i seguenti:



Quindi tra operatori e Clearing House non c'è alcun tipo di rapporto. Siccome le posizioni su futures possono implicare degli obblighi (qualora le variazioni nel prezzo futures siano sfavorevoli), sono richiesti dei depositi di garanzia (*margini*), che al termine saranno recuperati, assieme ai relativi interessi ($\Rightarrow$ non costituendo un costo, non influenzano i prezzi futures "teorici").

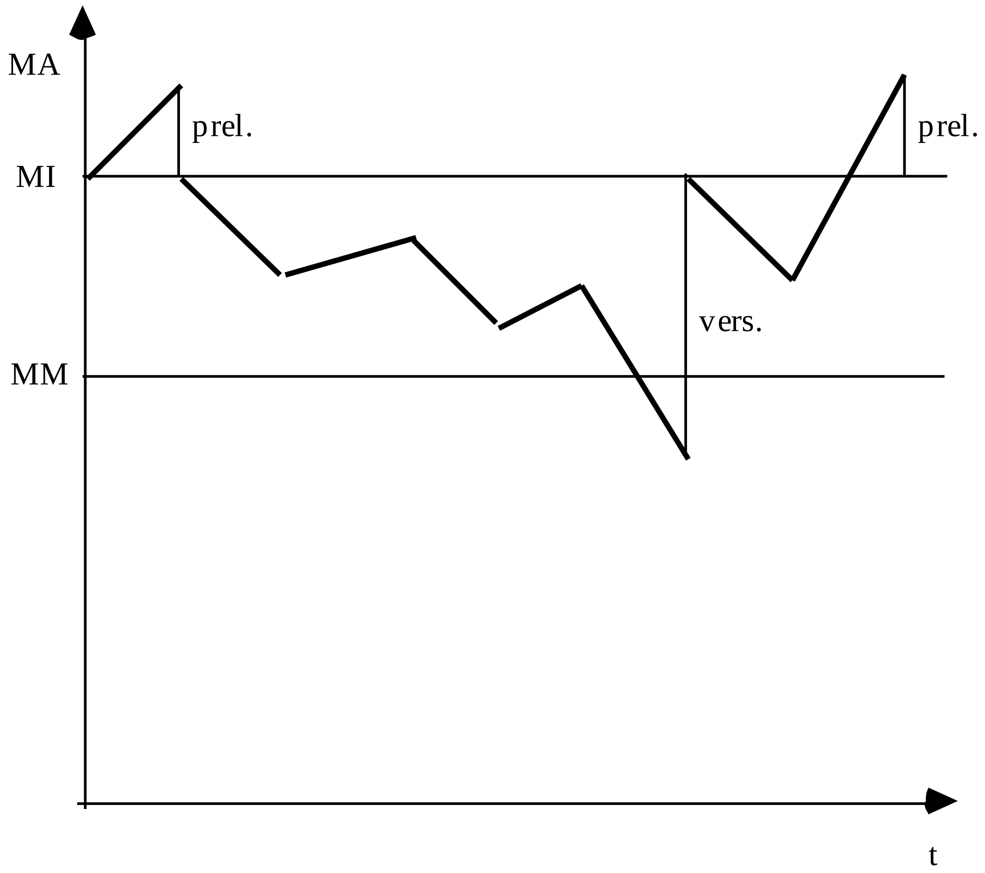
I commissionari di borsa rispondono direttamente nei confronti della Clearing House per gli impegni assunti, e devono pertanto tenere un deposito di garanzia presso la stessa.

Gli operatori, invece, si impegnano nei confronti dei commissionari, e allora anche ad essi viene richiesto un deposito (in contanti, titoli di stato, azioni della Clearing House) presso gli stessi.

Concentriamoci ora su quest'ultimo, che funziona come un conto corrente (*"margin account"*, MA):

- All'inizio dell'operazione viene richiesto il deposito del *"margine iniziale"* (MI), ad es. pari al 5% del prezzo futures iniziale, che viene depositato nel c/c.
- Su questo conto vengono poi addebitate/accreditate le variazioni giornaliere nel prezzo futures.
- Se, in seguito a variazioni favorevoli nel prezzo future, il valore del margin account supera quello del margine iniziale, (usualmente) le eccedenze possono essere prelevate dall'operatore.

- Se invece variazioni sfavorevoli fanno scendere il valore del margin account al di sotto del margine iniziale, onde evitare di chiedere frequentemente all'operatore di versare fondi addizionali viene fissato un *"margine di mantenimento"* (o "*margine minimo*", MM), ad es. pari al 75% del margine iniziale. Qualora il valore del conto scenda al di sotto di MM, l'operatore deve versare (di solito entro le 24 ore successive) un importo (*"margine di variazione"*, MV) tale da ripristinare MI.



OPZIONE

E' un titolo che conferisce al suo possessore il diritto di comprare (opzione *call*) o di vendere (opzione *put*) l'attività sottostante ad un prezzo prefissato, detto *prezzo di esercizio* o *prezzo base* (*"strike price"* o *"exercise price"*).

N.B.: Chi possiede l'opzione (cioè è in posizione lunga sulla stessa) ha soltanto il diritto, non l'obbligo, di comprare/vendere l'attività sottostante al prezzo di esercizio, e può anche decidere di non esercitare questo diritto (differenza dai contratti forward). Invece il sottoscrittore (o emittente) dell'opzione (in posizione corta) ha l'obbligo di adeguarsi alla volontà della controparte.

L'opzione ha una scadenza (*"maturity"*). Essa viene detta *Europea* se il diritto può essere esercitato soltanto alla scadenza, *Americana* se il diritto può essere esercitato anche prima della scadenza. In caso di esercizio anticipato (cioè prima della scadenza) di un'opzione americana, l'opzione si estingue.

N.B.: Questa terminologia non ha niente a che vedere con i mercati nei quali le opzioni sono trattate (che possono essere sia borse ufficiali che mercati OTC).

<u>Notazione</u>:

0	data di emissione dell'opzione
T	data di scadenza
K	prezzo di esercizio
$\{S(t); t \geq 0\}$	processo stocastico del prezzo del bene sottostante
$\{c(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del prezzo di un'opzione call europea
$\{p(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del prezzo di un'opzione put europea
$\{C(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del prezzo di un'opzione call americana
$\{P(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del prezzo di un'opzione put americana

PAYOFF ALLA SCADENZA DI UN'OPZIONE CALL EUROPEA

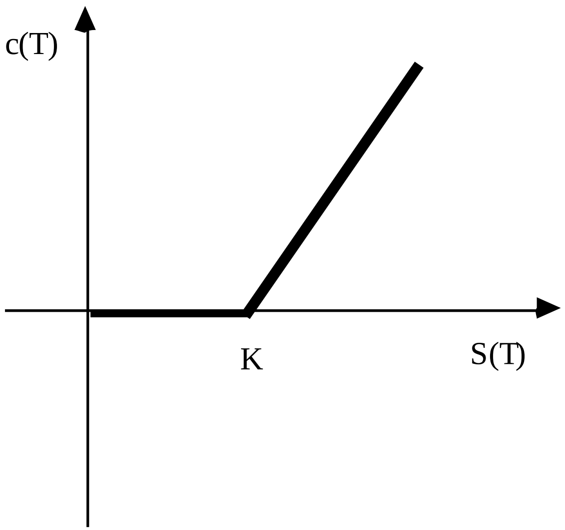
Le ipotesi di lavoro precedentemente enunciate, e in particolare quella di agenti razionali e non saziati, ci consentono di dire che l'opzione verrà esercitata se $S(T) > K$, non verrà esercitata se $S(T) < K$, sarà indifferente esercitarla o meno se $S(T) = K$. Quindi, dal punto di vista di chi possiede l'opzione, si ha:

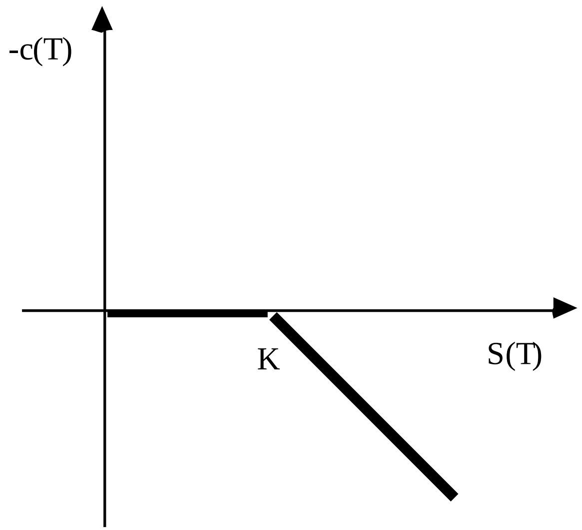
$$c(T) = \begin{cases} S(T) - K & \text{se } S(T) > K \\ 0 & \text{se } S(T) \le K \end{cases} = \max\{S(T) - K, 0\}$$

Il payoff di chi ha emesso l'opzione è invece l'opposto:

$$-c(T) = -\max\{S(T) - K, 0\} = \min\{K - S(T), 0\}$$

$\Rightarrow$ Visto che il payoff dell'opzione è (quasi) certamente ≥ 0, onde evitare opportunità di arbitraggio del II tipo anche il suo prezzo, $c(t)$, deve essere $\ge 0 \;\; \forall t \in [0, T)$. Se inoltre, subordinatamente allo stato d'informazione disponibile al tempo $t < T$, si ha $\mathrm{P}(S(T) > K) > 0$, per evitare opportunità di arbitraggio del I tipo anche $c(t)$ deve essere > 0.





(margini)

PAYOFF ALLA SCADENZA DI UN'OPZIONE PUT EUROPEA

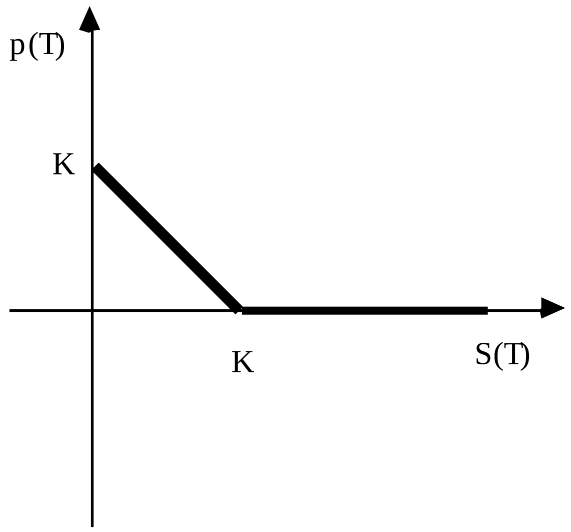
Simmetricamente, la put verrà esercitata se $S(T) < K$, non verrà esercitata se $S(T) > K$, sarà indifferente esercitarla o meno se $S(T) = K$. Quindi, dal punto di vista di chi possiede l'opzione, si ha:

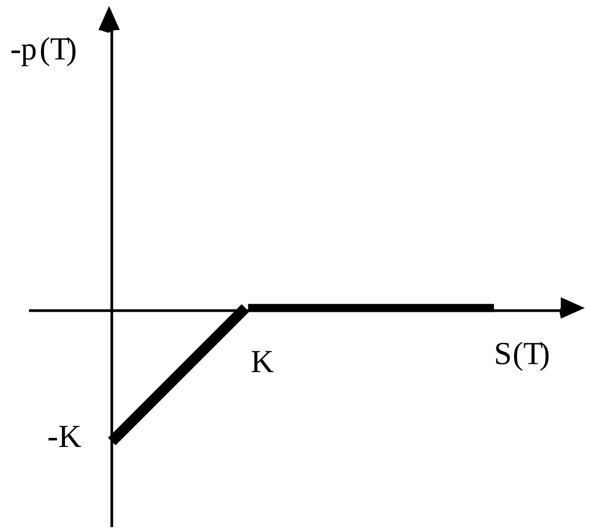
$$p(T) = \begin{cases} K - S(T) & \text{se } S(T) < K \\ 0 & \text{se } S(T) \geq K \end{cases} = \max\{K - S(T), 0\}$$

Il payoff di chi ha emesso l'opzione è invece l'opposto:

$$-p(T) = -\max\{K - S(T), 0\} = \min\{S(T) - K, 0\}$$

$\Rightarrow$ Le stesse considerazioni di prima ci portano a dire che $p(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T)$. Se inoltre, subordinatamente all'informazione disponibile al tempo $t < T$, $\mathrm{P}\left(S(T) < K\right) > 0$, allora $p(t) > 0$.





(margini)

FINALITA' CHE POSSONO INDURRE A STIPULARE CONTRATTI DI OPZIONE

Posizioni "scoperte"

- copertura da un rischio (come nel caso dei contratti forward e futures). Assumendo posizioni lunghe su opzioni, dietro pagamento del premio ci si copre soltanto dall'eventualità di variazioni sfavorevoli nel prezzo del sottostante, approfittando invece delle variazioni favorevoli.
- "speculazione". Si assumono sia posizioni lunghe che posizioni corte.

Garanzie di minimo (Assicurazione di portafoglio)

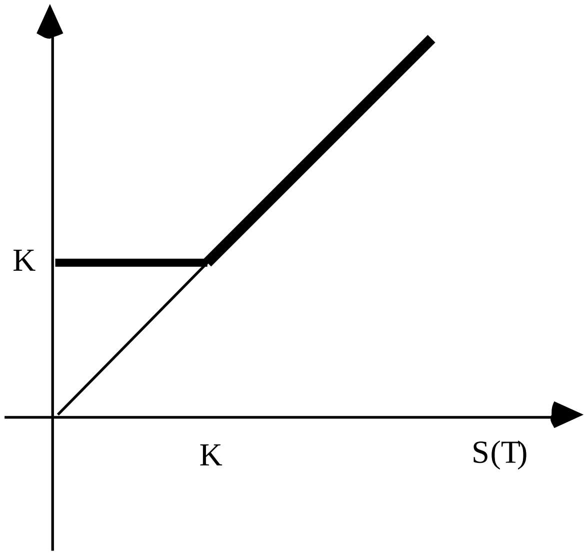
Immaginiamo di aver acquisito un investimento (portafoglio) rischioso di valore "finale" in T (aleatorio) $S(T)$. Se ad esso affianchiamo un'opzione put sullo stesso con scadenza T e prezzo di esercizio K, il portafoglio risulta "assicurato a livello K", nel senso che il suo valore finale non può essere $< K$ ($\Rightarrow$ garanzia di minimo). Infatti:

$$S(T) + \max\{K - S(T), 0\} = \max\{K, S(T)\}$$

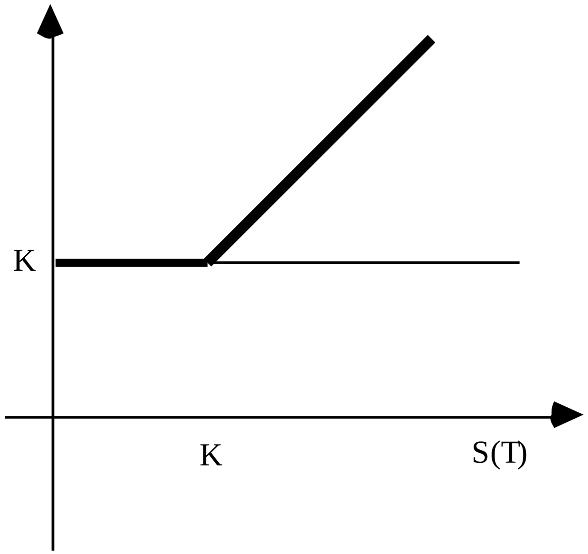
"**Bonus**"

Se invece si immagina di partire da un investimento a rendimento certo, di valore finale (in T) pari a K, e si desidera trarre beneficio dall'eventuale andamento positivo del mercato azionario, basta acquistare un'opzione call con scadenza T, prezzo di esercizio K e attività sottostante un indice di borsa di valore "finale" $S(T)$. Il risultato è lo stesso di prima, in quanto

$$K + \max\left\{S(T) - K, 0\right\} = \max\left\{S(T), K\right\}$$



garanzie di minimo



bonus

CAPS/FLOORS/COLLARS/SWAPTIONS

Si supponga di dover pagare degli <u>interessi</u>, al tempo $T > \tau(\geq 0)$ e relativi al periodo $[\tau, T]$, su un capitale nominale di riferimento N, calcolati in regime di interesse semplice applicando il <u>tasso variabile</u> $L(\tau,T)$. Se si acquista un'<u>opzione call</u> europea ($\Rightarrow$ <u>*caplet*</u>) con scadenza T, variabile sottostante il tasso L e strike il tasso fisso k (applicato allo stesso capitale nominale e per lo stesso periodo), si ottiene:

$$-N(T-\tau)L(\tau,T) + N(T-\tau)\max\{L(\tau,T)-k, 0\} = -N(T-\tau)\min\{L(\tau,T), k\}.$$

<u>N.B.</u>: Il payoff dell'opzione è già noto al tempo τ se, come di solito accade, $L(\tau,T)$ viene desunto dal prezzo del titolo a cedola nulla $b(\tau,T)$. Quindi, in questo caso, talvolta viene stabilito che la scadenza dell'opzione sia τ (anziché T), e il suo payoff sia pari a $N(T-\tau)\max\{L(\tau,T)-k, 0\}b(\tau,T)$.

Un <u>*cap*</u> è un <u>portafoglio di caplets</u>, ciascuno con scadenza $i\Delta$ e variabile sottostante il tasso $L((i-1)\Delta,\ i\Delta)$, per $i = 1, 2, ..., n$. Il tasso strike k è di solito lo stesso per tutti i caplets, così come il capitale di riferimento N.

$\Rightarrow$ Un cap, combinato con un debito a tasso variabile, consente di porre un <u>limite massimo</u> ($\Rightarrow$ <u>cap</u>) al tasso d'interesse pagato.

Simmetricamente, se invece si devono pagare degli <u>interessi al tasso fisso</u> k e si acquista un'<u>opzione put</u> europea ($\Rightarrow$ *<u>floorlet</u>*) con scadenza T, variabile sottostante il tasso L e strike k, si perviene allo stesso risultato:

$$-N(T-\tau)k + N(T-\tau)\max\{k - L(\tau,T),0\} = -N(T-\tau)\min\{L(\tau,T),k\}.$$

Un *<u>floor</u>* è un <u>portafoglio di floorlets</u>, ciascuno di essi con strike k, capitale nominale N, scadenza $i\Delta$ e variabile sottostante il tasso $L\big((i-1)\Delta,\ i\Delta\big)$, per $i = 1,2,...,n$.

$\Rightarrow$ Un floor, combinato con un debito a tasso fisso, consente di pagare di meno se il tasso variabile è minore del tasso fisso.

<u>N.B.</u>: Il termine floor ("pavimento") deriva dal fatto che, se combinato invece con un investimento a tasso variabile, consente di porre una <u>limitazione inferiore</u> ($\Rightarrow$ <u>floor</u>) al tasso d'interesse, essendo $L + \max\{k - L, 0\} = \max\{L, k\}$ (come nel caso dell'assicurazione di portafoglio).

Un <u>*collar*</u> è un portafoglio composto da una posizione lunga(corta) in un floor con strike k_1 e una posizione corta(lunga) in un cap con strike $k_2 > k_1$. Se combinato con una posizione lunga(corta) in un'obbligazione a tasso variabile consente di mantenere il tasso d'interesse compreso tra k_1 e k_2. Si ha infatti:

$$L + \max\{k_1 - L, 0\} - \max\{L - k_2, 0\} = \begin{cases} k_1 & \text{if } L < k_1 \\ L & \text{if } k_1 \le L \le k_2 \\ k_2 & \text{if } L > k_2 \end{cases}.$$

<u>N.B.</u>: Se $k_1 = k_2$, il collar degenera in un receiver(payer) swap in quanto

$$N\Delta\left(\max\{k - L(t_{i-1}, t_i), 0\} - \max\{L(t_{i-1}, t_i) - k, 0\}\right) = N\Delta(k - L(t_{i-1}, t_i)).$$

$\Rightarrow$ Il tasso swap è quel particolare strike che uguaglia i valori di caps e floors.

Una (payer/receiver) <u>*swaption*</u> emessa al tempo $t < t_0$ consente di entrare in un (payer/receiver) swap al tempo t_0 pagando gli interessi fissi al tasso (strike) k anziché al tasso swap corrente $L^{SWAP}(t_0)$ $\Rightarrow$ Si può vedere come un'opzione sul tasso swap L^{SWAP}.

$\Rightarrow$ Mentre <u>caps</u>, <u>floors</u> e <u>collars</u> possono essere espressi (dopo semplici passaggi algebrici) come portafogli di opzioni su titoli a cedola nulla, una <u>swaption</u> è un'opzione su un portafoglio di titoli a cedola nulla, e risulta quindi più complicata da valutare.

TERMINOLOGIA RELATIVA ALLE OPZIONI

In $t \in [0, T]$ un'opzione si dice

- "*in the money*" quando il suo (eventuale) esercizio genererebbe un flusso di cassa strettamente positivo,
- "*at the money*" quando il suo (eventuale) esercizio genererebbe un flusso di cassa nullo,
- "*out of the money*" quando il suo (eventuale) esercizio genererebbe un flusso di cassa strettamente negativo:

	call	**put**
in the money	$S(t) > K$	$S(t) < K$
at the money	$S(t) = K$	$S(t) = K$
out of the money	$S(t) < K$	$S(t) > K$

N.B. La terminologia è valida anche per le opzioni europee, pur essendo esercitabili solo alla scadenza T. Se un'opzione americana è in the money prima della scadenza, non è detto che convenga esercitarla subito; se non è in the money, sicuramente non va esercitata.

Si chiama *valore intrinseco di un'opzione*, in $t \in [0,T]$, la seguente quantità:

$$\max\{S(t)-K,0\} \qquad \textbf{call}$$

$$\max\{K-S(t),0\} \qquad \textbf{put}$$

Alla scadenza T il prezzo (payoff) di un'opzione, europea o americana, coincide con il suo valore intrinseco. Prima della scadenza, come vedremo, il prezzo di un'opzione americana è sempre $\geq$ del suo valore intrinseco (mentre per le opzioni europee può essere anche $<$). Se in particolare il prezzo di un'opzione americana è $>$ del suo valore intrinseco, si dice che l'opzione ha *valore temporale*, dato da

$$C(t)-\max\{S(t)-K,0\} \qquad \textbf{call}$$

$$P(t)-\max\{K-S(t),0\} \qquad \textbf{put}$$

Un'opzione americana dotata di valore temporale non va assolutamente esercitata, anche se fortemente in the money (piuttosto che esercitarla conviene venderla!)

LIMITAZIONI DI PURO ARBITRAGGIO PER IL PREZZO DELLE OPZIONI

(facilmente dimostrabili per assurdo)

Come si è già anticipato, le ipotesi di lavoro introdotte all'inizio non sono purtroppo sufficienti per determinare in maniera precisa il prezzo di un'opzione, ma consentono di individuare un intervallo di valori in cui esso deve cadere. Anche qui, rimuovendo qualche ipotesi, l'intervallo si "allarga" ulteriormente.

D’ora innanzi, per fissare le idee, ci concentreremo esclusivamente sulle <u>opzioni su azioni</u> o, più in generale, su opzioni la cui attività sottostante non richiede costi di detenzione. Tuttavia i risultati che seguono possono essere facilmente adattati anche al caso di opzioni su merci.

Come per i contratti forward, indichiamo con

$D(t,T)$ il valore al tempo t di tutti i dividendi (noti) pagati dal bene sottostante tra t e T,

q l’intensità di dividendo pagato nel continuo dal bene sottostante,

e poniamo
$$\bar{S}(t) = \begin{cases} S(t) & \text{se non ci sono dividendi tra } t \text{ e } T \\ S(t) - D(t,T) & \text{se i dividendi sono certi} \\ S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} & \text{se i dividendi sono pagati nel continuo} \end{cases}, \quad \text{per } t \in [0,T].$$

Relazioni fra opzioni europee ed americane con identiche caratteristiche

$$C(t) \geq c(t), \qquad P(t) \geq p(t) \qquad \forall t \in [0,T]$$

Limitazioni di puro arbitraggio per opzioni call europee

$$\max\left\{\bar{S}(t) - Kb(t,T), 0\right\} \leq c(t) \leq S(t) \qquad \forall t \in [0,T]$$

In particolare: $S(t) = 0 \ \Rightarrow\ c(t) = 0$, $\quad K = 0,\ \bar{S}(t) = S(t) \ \Rightarrow\ c(t) = S(t)$

Limitazioni di puro arbitraggio per opzioni call americane

$$\max\left\{S(t) - K, \bar{S}(t) - Kb(t,T), 0\right\} \leq C(t) \leq S(t) \qquad \forall t \in [0,T]$$

In particolare: $S(t) = 0 \ \Rightarrow\ C(t) = 0$, $\quad K = 0 \ \Rightarrow\ C(t) = S(t)$

Limitazioni di puro arbitraggio per opzioni put europee

$$\max\left\{Kb(t,T) - \bar{S}(t), 0\right\} \leq p(t) \leq Kb(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$$

In particolare: $S(t) = 0 \ \Rightarrow\ p(t) = Kb(t,T)$, $\quad K = 0 \ \Rightarrow\ p(t) = 0$

Limitazioni di puro arbitraggio per opzioni put americane

$$\max\left\{K - S(t), Kb(t,T) - \bar{S}(t), 0\right\} \leq P(t) \leq K \qquad \forall t \in [0,T]$$

In particolare: $S(t) = 0 \ \Rightarrow\ P(t) = K$, $\quad K = 0 \ \Rightarrow\ P(t) = 0$

Inoltre:

- il prezzo di un'opzione call, sia europea che americana, è una funzione decrescente e convessa (in senso debole), nonché continua rispetto al prezzo di esercizio
- il prezzo di un'opzione put, sia europea che americana, è una funzione crescente e convessa (in senso debole), nonché continua rispetto al prezzo di esercizio
- il prezzo di un'opzione americana, sia call che put, è una funzione crescente (in senso debole) rispetto alla sua durata residua.

RELAZIONI FRA OPZIONI CALL E PUT "OMOLOGHE"

Put-Call Parity per opzioni europee

$$p(t) = c(t) - \bar{S}(t) + Kb(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$$

N.B.: $c(T) - p(T) = \max\{S(T) - K, 0\} - \max\{K - S(T), 0\} = S(T) - K = V^L(T)$

($\Rightarrow$ altro modo per replicare un contratto forward)

$\Rightarrow \quad c(t) - p(t) = V^L(t) \quad \Rightarrow \quad \left(V^L(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; c(t) = p(t)\right) \qquad \forall t \in [0,T]$

$\Rightarrow$ Il prezzo forward è quel particolare strike che uguaglia i valori di put e call omologhe

Relazioni fra opzioni put e call americane

$$C(t) - S(t) + Kb(t,T) \le P(t) \le C(t) - \bar{S}(t) + K \qquad \forall t \in [0,T]$$

ESERCIZIO ANTICIPATO DELLE OPZIONI CALL AMERICANE

Proposizione 1: Se l'attività sottostante non paga dividendi (almeno fino a T) e $K > 0$, allora non è mai ottimale esercitare un'opzione call americana prima della scadenza $\quad \Rightarrow \quad C(t) = c(t) \quad \forall t \in [0, T]$.

Dim.: Già sappiamo che $C(T) = c(T) = \max\{S(T) - K, 0\}$. Tenendo conto che, nel caso in cui non ci sono dividendi, $\bar{S}(t) = S(t)$, si ha inoltre:

$$C(t) \geq S(t) - Kb(t,T) > S(t) - K \quad \Rightarrow \quad C(t) > S(t) - K \quad \forall t \in [0,T),$$

poiché abbiamo assunto che i prezzi dei titoli a cedola nulla siano < 1 prima della scadenza, e $K > 0$.

Proposizione 2: Se, al tempo $t < T$, investire lo strike K in titoli a cedola nulla con scadenza T rende di più, in termini di interessi, dei dividendi pagati da un'unità di sottostante, allora non è ottimale esercitare un'opzione call americana, anche se fortemente in the money, cioè

$$\left.\begin{array}{ll} K[1 - b(t,T)] > D(t,T) & \text{in caso di dividendi certi} \\ K[1 - b(t,T)] > S(t)\left[1 - \mathrm{e}^{-q(T-t)}\right] & \text{in caso di dividendi nel continuo} \end{array}\right\} \Rightarrow C(t) > S(t) - K.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>:

- Gli interessi al tempo T sono dati da $\dfrac{K}{b(t,T)} - K = K\left[\dfrac{1}{b(t,T)} - 1\right]$, quindi il loro valore in t si ottiene moltiplicandoli per il prezzo del titolo a cedola nulla $b(t,T)$.

- In caso di dividendi nel continuo, i dividend totali, in T, prodotti da una quantità iniziale unitaria di sottostante al tempo t, espressi in unità del bene stesso, sono pari a $e^{q(T-t)} - 1$. Quindi $e^{q(T-t)} - 1$ unità di sottostante al tempo T sono equivalenti a $\left[e^{q(T-t)} - 1\right]e^{-q(T-t)} = 1 - e^{-q(T-t)}$ unità dello stesso al tempo t.

- Se l'ipotesi della Propositione 2 è soddisfatta per un fissato $t < T$, non è detto che lo sia per ogni τ fra t e T, e quindi non si può concludere che $C(t) = c(t)$.

<u>Dim.</u>: Si ricordi che $C(t) \geq \overline{S}(t) - Kb(t,T)$. Quindi, se i dividendi sono noti,

$$C(t) \geq \left[S(t) - D(t,T)\right] - Kb(t,T) = S(t) - K + K - Kb(t,T) - D(t,T) > S(t) - K$$

poiché $K - Kb(t,T) - D(t,T) > 0$ per ipotesi. In caso di dividendi nel continuo,

$$C(t) \geq S(t)e^{-q(T-t)} - Kb(t,T) = S(t) - K + K - Kb(t,T) - S(t) + S(t)e^{-q(T-t)} > S(t) - K$$

poiché $K - Kb(t,T) - S(t) + S(t)e^{-q(T-t)} > 0$ per ipotesi.

<u>Proposizione 3</u>: Se le (eventuali) date di pagamento dividendi tra 0 e T sono note, allora l'esercizio anticipato di un'opzione call americana non è mai ottimale, quando $K > 0$, se $t(< T)$ non è una data di pagamento dividendi, oppure, se lo è, il dividendo corrispondente è già stato pagato.

<u>N.B.</u>: Gli unici istanti in cui non siamo in grado di escludere la convenienza all'esercizio anticipato di un'opzione call americana sono quelli immediatamente precedenti la distribuzione di un dividendo (se $K > 0$).

<u>Dim.</u>: Sia $t < T$, e $\tau \in (t,T)$ la prossima data di pagamento dividendi. Il nostro obiettivo è quello di provare che $C(t) > S(t) - K$. Se, *per assurdo*, fosse $C(t) = S(t) - K$ (già sappiamo infatti che $C(t)$ non può essere $< S(t) - K$), allora, al tempo t, si potrebbe vendere allo scoperto il sottostante, comprare la call e investire K in titoli a cedola nulla di scadenza τ, con un cash-flow iniziale $= 0$, per poi chiudere tutto (cioè vendere la call, incassare il valore di rimborso dei titoli e comprare il sottostante per restituirlo) al tempo τ, <u>immediatamente prima del pagamento del dividendo</u>. In tal modo si potrebbe realizzare un cash-flow finale pari a

$$C(\tau) + \frac{K}{b(t,\tau)} - S(\tau) \geq \left[S(\tau) - K\right] + \frac{K}{b(t,\tau)} - S(\tau) = K\left[\frac{1}{b(t,\tau)} - 1\right] > 0,$$

poiché $b(t,\tau) < 1$ e $K > 0$. Questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del I tipo.

<u>N.B.</u>: E' fondamentale chiudere tutto prima del pagamento del dividendo, altrimenti saremmo noi a dover pagare il dividendo, e quindi il cash-flow finale potrebbe anche essere negativo.

ESERCIZIO ANTICIPATO DELLE OPZIONI PUT AMERICANE

Proposizione 1: Se, al tempo $t<T$, investire lo strike K in titoli a cedola nulla di scadenza T rende meno, in termini di interessi, dei dividendi prodotti da un'unità di sottostante, allora non è ottimale esercitare un'opzione put americana, anche se fortemente in the money, cioè

$$\left.\begin{array}{ll} K\left[1-b(t,T)\right]<D(t,T) & \text{in caso di dividendi certi} \\ K\left[1-b(t,T)\right]<S(t)\left[1-\mathrm{e}^{-q(T-t)}\right] & \text{in caso di dividendi nel continuo} \end{array}\right\} \Rightarrow P(t)>K-S(t).$$

Dim.: Si ricordi che $P(t)\geq Kb(t,T)-\bar{S}(t)$. Quindi, se i dividendi sono noti,

$$P(t)\geq Kb(t,T)-\left[S(t)-D(t,T)\right]=K-S(t)+D(t,T)-K+Kb(t,T)>K-S(t)$$

poiché $D(t,T)-K+Kb(t,T)>0$ per ipotesi. In caso di dividendi nel continuo,

$$P(t)\geq Kb(t,T)-S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}=K-S(t)+S(t)-S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}-K+Kb(t,T)>K-S(t)$$

poiché $S(t)-S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}-K+Kb(t,T)>0$ per ipotesi.

<u>Proposizione 2</u>: Si supponga che i dividendi siano noti. Siano $t<T$ e $\tau\in(t,T)$ la prossima data di pagamento dividendi. Se il dividendo che deve essere pagato in τ, diciamo D, supera gli interessi conseguibili tramite un investimento dello strike K in titoli a cedola nulla di scadenza τ, allora non è ottimale esercitare l'opzione put americana in t, cioè $D>\dfrac{K}{b(t,\tau)}-K \;\;\Rightarrow\;\; P(t)>K-S(t)$.

<u>Dim.</u>: Si supponga *per assurdo* che $P(t)=K-S(t)$. Allora si vendano allo scoperto $\dfrac{K}{b(t,\tau)}$ titoli a cedola nulla di scadenza τ, si compri la put e il sottostante (con un cash-flow iniziale pari a 0). Al tempo τ si incassi prima il dividendo, e poi si chiuda tutto vendendo la put e il sottostante e rimborsando i titoli a cedola nulla, con un cash-flow strettamente positivo:

$$D+P(\tau)+S(\tau)-\frac{K}{b(t,\tau)}>\frac{K}{b(t,\tau)}-K+P(\tau)+S(\tau)-\frac{K}{b(t,\tau)}=P(\tau)-\left[K-S(\tau)\right]\geq 0$$

Questa sarebbe quindi un'opportunità di arbitraggio del I tipo.

<u>N.B.</u>: Se i prezzi dei titoli a cedola nulla di scadenza τ sono deterministici e crescenti nel tempo, allora $D>\dfrac{K}{b(t,\tau)}-K \;\Rightarrow\; D>\dfrac{K}{b(z,\tau)}-K \quad \forall z\in\left[t,\tau\right]$. Ciò implica che l'esercizio anticipato non è ottimale non soltanto in t ma (almeno) fino a quando il dividendo D non sia stato pagato.

MODELLO BINOMIALE

(Cox, Ross, Rubinstein, 1979)

Come si è visto, le ipotesi di lavoro introdotte all'inizio non sono sufficienti per individuare in maniera precisa il prezzo di un'opzione. Se si vuol raggiungere questo risultato, perlomeno con riferimento alle opzioni europee, bisogna "modellare" anche l'evoluzione stocastica del prezzo dell'attività sottostante. In tal senso, un modello molto semplice ed allo stesso tempo molto efficace per capire la logica sottostante è quello binomiale. Esso inoltre gode di importanti proprietà asintotiche.

Modello monoperiodale

Supponiamo che

- il mercato sia aperto in due sole date, indicate per convenzione con 0 e 1;
- su di esso siano trattate due attività di base: un'attività non rischiosa, data dal money market account, e un'attività rischiosa;
- il prezzo iniziale dell'attività rischiosa sia $S(0) = S > 0$; il suo prezzo in 1, $S(1)$, possa assumere soltanto due possibili valori, indicati convenzionalmente con Su ("up") e Sd ("down"), dove u e d sono due numeri reali strettamente positivi tali che $u > d$.

Poiché operiamo in tempo discreto, il money market account formalizza una strategia di tipo roll-over su titoli a cedola nulla con scadenza la data successiva di apertura dei mercati. Nel modello monoperiodale ciò significa investire 1 unità monetaria al tempo 0 nel titolo a cedola nulla con scadenza 1, per cui $B(0) = 1$ e $B(1) = \mathrm{e}^{r}$, con $r \doteq r(0,1)$.

Schematicamente si ha:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{e}^r \\ & \nearrow & \\ 1 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathrm{e}^r \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & & Su \\ & \nearrow & \\ S & & \\ & \searrow & \\ & & Sd \end{array}$$

OSSERVAZIONI:

1. Il prezzo in 1 dell'attività rischiosa congloba eventuali dividendi.
2. E' importante che tutti gli operatori del mercato concordino sulla descrizione dell'incertezza riguardante $S(1)$, attribuendo probabilità strettamente positiva ad entrambe le determinazioni Su e Sd, mentre è del tutto irrilevante tale probabilità, che potrebbe anche differire da operatore ad operatore.

$\Rightarrow$ L'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio (del I tipo) implica $d < \mathrm{e}^r < u$ (dimostrazione per assurdo).

Introduciamo ora dei derivati con scadenza 1 e attività sottostante l'attività rischiosa.

$\Rightarrow$ Anche il loro payoff finale potrà assumere (al più) due determinazioni a seconda che il prezzo dell'attività sottostante sia Su o Sd.

Conveniamo di rappresentare tale payoff tramite un vettore di $\mathbb{R}^2$, in cui la prima componente rappresenta la determinazione nello "stato up" e la seconda quella nello "stato down". Rappresentiamo allo stesso modo anche le due attività di base.

<u>Esempi</u>: $\begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} \to$ attività rischiosa di base, $\begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix} \to$ attività non rischiosa

$\begin{pmatrix} \max\{Su - K, 0\} \\ \max\{Sd - K, 0\} \end{pmatrix} \to$ opzione call con prezzo di esercizio K

$\begin{pmatrix} K - Su \\ K - Sd \end{pmatrix} \to$ contratto forward con prezzo di consegna K, in posizione corta

<u>Definizioni</u>:

1. Dato un titolo (derivato), identificabile tramite il suo payoff finale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, esso si dice <u>replicabile</u> se è possibile ottenerlo come valore finale di un portafoglio costituito dalle due attività di base (cioè se tale derivato è un'attività *ridondante*).

2. Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ replicabile tramite un portafoglio costituito da δ attività rischiose e β attività non rischiose. I due numeri reali δ e β definiscono la <u>strategia</u> (o portafoglio) <u>replicante</u> il payoff $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   $\Rightarrow$ Si tratta (necessariamente) di una <u>strategia statica</u>, in quanto inizia in 0 e non viene più modificata fino alla sua chiusura, in 1.

3. Il <u>mercato</u> costituito dalle due attività di base si dice <u>completo</u> se ogni payoff è replicabile.

   $\Rightarrow$ <u>Il mercato risulta completo</u>. Infatti, essendo $u \neq d$,

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; \exists \delta, \beta \in \mathbb{R} : \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \mathrm{e}^r \\ \mathrm{e}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

   Inoltre <u>la strategia replicante è unica</u>:

$$\delta = \frac{x - y}{S(u - d)}, \qquad \beta = \mathrm{e}^{-r} \frac{yu - xd}{u - d} .$$

⇒ L'assenza di opportunità di arbitraggio implica che il prezzo in 0 del derivato deve coincidere con quello del portafoglio replicante:

$$V_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \delta S + \beta = \frac{x-y}{S(u-d)} S + \mathrm{e}^{-r}\frac{yu - xd}{u-d} = \left(x\mathrm{e}^{-r}\right)q + \left(y\mathrm{e}^{-r}\right)(1-q),$$

con $q = \dfrac{\mathrm{e}^r - d}{u-d} \in (0,1)$, indipendente da x e y (⇒ la stessa per tutti i derivati, e ovviamente anche per le attività di base).

⇒ Il prezzo in 0 di tutti i titoli si ottiene come speranza matematica, calcolata in base ad una distribuzione, $\mathbb{Q}$, che assegna probabilità q (>0) allo "stato up" e $1-q$ (>0) allo "stato down", del loro payoff finale attualizzato col tasso privo di rischio:

$V_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[X\mathrm{e}^{-r}\right]$, dove X è una variabile aleatoria che assume determinazione x nello stato up e y nello stato down.

⇒ $\mathbb{Q}$ viene detta distribuzione neutrale al rischio.

⇒ Nel modello binomiale c'è equivalenza tra assenza di opportunità di arbitraggio ed esistenza di una siffatta distribuzione; più in generale l'esistenza di (almeno) una distribuzione neutrale al rischio implica l'assenza di opportunità di arbitraggio.

⇒ L'unicità della distribuzione neutrale al rischio scende dalla completezza del mercato.

Modello multiperiodale

Generalizzando il modello precedente, supponiamo ora che

- il mercato sia aperto in tempo discreto, alle date equintervallate $0,1,2,...$;
- su di esso siano trattate due attività di base: un'attività non rischiosa, il money market account, che viaggia a un tasso deterministico e costante $r \doteq r(i-1,i)$ per $i=1,2,...$, e un'attività rischiosa (che non stacca dividendi) con prezzo in 0 pari a $S(0)=S>0$;
- subordinatamente all'informazione disponibile al tempo t ($\in \mathbb{N}$), il prezzo in $t+1$ dell'attività rischiosa, $S(t+1)$, possa assumere soltanto due possibili determinazioni, pari a $S(t)u$ e $S(t)d$, con $u > \mathrm{e}^r > d > 0$.

$\Rightarrow$ L'evoluzione stocastica del prezzo dell'attività rischiosa può essere rappresentata tramite un albero binomiale con nodi "ricombinatisi".

$\Rightarrow$ Tra il tempo 0 e il tempo T ($\in \mathbb{N}^+$) il prezzo $S(t)$ può percorrere 2^T possibili traiettorie; tuttavia il prezzo finale $S(T)$ può assumere soltanto $T+1$ determinazioni diverse, date da $S_T^{(i)} = Su^{T-i}d^i$, $i=0,1,...,T$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & \nearrow & \\
 & & & & & & Su^3 & & \\
 & & & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & Su^2 & & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & Su & & & & Su^2d & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
S & & & & Sud & & & & \ldots\ldots \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & Sd & & & & Sud^2 & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & Sd^2 & & & & \\
 & & & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & & & Sd^3 & & \\
 & & & & & & & \searrow & \\
\end{array}
$$

$t =$ 0 1 2 3 ……

Evoluzione stocastica del prezzo dell'attività rischiosa $S(t)$

Possiamo allora riformulare il problema della replicabilità e quello della completezza del mercato, come nel modello monoperiodale, salvo che ora le strategie (o portafogli) replicanti non devono essere necessariamente statiche ma possono essere modificate negli istanti di apertura del mercato.

Definizioni

1. **strategia dinamica** (che inizia in 0 e termina in $T \in \mathbb{N}^+$):
   coppia di processi stocastici $\left(\delta(t), \beta(t)\right)$, $t = 0,1,...,T-1$, dove $\delta(t)$ (rispettivamente $\beta(t)$) rappresenta la quantità di attività rischiosa (rispettivamente non rischiosa) presente in portafoglio, che viene decisa in t, in base allo *stato del mondo* in cui ci si trova, e mantenuta fissa fino all'epoca $t+1$;

2. **strategia dinamica autofinanziantesi** (che inizia in 0 e termina in $T \in \mathbb{N}^+$):
   negli (eventuali) istanti intermedi la ricalibratura del portafoglio deve essere a costo nullo, cioè $\left[\delta(t+1) - \delta(t)\right] S(t+1) + \left[\beta(t+1) - \beta(t)\right] \mathrm{e}^{r(t+1)} = 0$, $t = 0,1,...,T-2$.

⇒ Procedendo a ritroso, si prova che nel modello binomiale multiperiodale ogni payoff finale esigibile in una fissata epoca T è replicabile in maniera univoca tramite una strategia dinamica autofinanziantesi;

⇒ il mercato costituito dalle due attività di base è completo.

⇒ Visto che una strategia dinamica autofinanziantesi replicante un fissato payoff finale comporta esclusivamente un cash-flow iniziale, l'assenza di opportunità di arbitraggio implica che il valore in 0 del payoff deve coincidere con il costo iniziale della strategia; con ovvio significato dei simboli, nel caso in cui il payoff dipende esclusivamente dal prezzo finale del sottostante $S(T)$ e non anche da suoi valori precedenti, si ha cioè

$$V_0\begin{pmatrix} x_T^{(0)} \\ x_T^{(1)} \\ \dots \\ x_T^{(T)} \end{pmatrix} = \delta(0)S + \beta(0).$$

Sostituendo $\delta(0)$ e $\beta(0)$ individuati mediante il procedimento a ritroso, si ottiene:

$$V_0\begin{pmatrix} x_T^{(0)} \\ x_T^{(1)} \\ \dots \\ x_T^{(T)} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{T}\left(x_T^{(i)}\mathrm{e}^{-rT}\right)\binom{T}{i}q^{T-i}(1-q)^i, \qquad \text{con } q = \frac{\mathrm{e}^r - d}{u-d}\ .$$

$\Rightarrow$ <u>Esiste, unica, una distribuzione neutrale al rischio</u> $\mathbb{Q}$ tale che $V_0\begin{pmatrix} x_T^{(0)} \\ x_T^{(1)} \\ \dots \\ x_T^{(T)} \end{pmatrix} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[X\mathrm{e}^{-rT} \right]$,

dove X indica il payoff finale aleatorio.

$\Rightarrow$ Si tratta di una <u>distribuzione binomiale</u> di parametri T e $1-q$ (la v.a. sottostante è il numero di "downs" che il prezzo dell'attività rischiosa subisce tra 0 e T).

$\Rightarrow$ In particolare, il <u>prezzo</u> in 0 <u>di un'opzione call europea</u> (o americana, visto che l'attività sottostante non stacca dividendi) con scadenza T e strike K è pari a

$$c(0) = \mathrm{e}^{-rT} \sum_{i=0}^{T} \max\left\{ Su^{T-i}d^i - K, 0 \right\} \binom{T}{i} q^{T-i}(1-q)^i .$$

Escludendo i casi banali in cui $K \le Sd^T$ ($c_0 = S - K\mathrm{e}^{-rT}$) e $K \ge Su^T$ ($c_0 = 0$), si ha:

$$c(0) = S\Psi(n;T,1-q^*) - K\mathrm{e}^{-rT}\Psi(n;T,1-q),$$

dove $n = \dfrac{\ln\left(Su^T/K\right)}{\ln\left(u/d\right)}$, $q = \dfrac{\mathrm{e}^r - d}{u-d}$, $q^* = uq\mathrm{e}^{-r}$ e $\Psi(x;N,p)$ = valore della funzione di ripartizione in x di una v.a. con distribuzione binomiale di parametri N e p.

⇒ Il prezzo in 0 di un'opzione put europea si può determinare in maniera analoga, oppure sfruttando la put-call parity:

$$p(0) = c(0) - S + K\mathrm{e}^{-rT} = K\mathrm{e}^{-rT}[1 - \Psi(n;T,1-q)] - S[1 - \Psi(n;T,1-q^*)].$$

Proprietà asintotiche del modello binomiale

Si supponga

- di suddividere l'intervallo $[0,T]$ in I intervallini di uguale ampiezza $\Delta = T/I$,
- che i mercati, costituiti dalle due attività di base, siano aperti alle epoche $i\Delta$, $\mathrm{i} = 0,1,\dots,I$,
- che, subordinatamente all'informazione disponibile al tempo $t = i\Delta$ $(i = 0,1,\dots,I-1)$, il prezzo in $t+\Delta$ dell'attività rischiosa, $S(t+\Delta)$, possa assumere soltanto due possibili determinazioni, pari a $S(t)u(\Delta)$ e $S(t)d(\Delta)$, dove u e d sono ora due funzioni a valori reali tali che $u(\Delta) > \mathrm{e}^{r\Delta} > d(\Delta) > 0$.

⇒ Procedendo esattamente come prima, si determina il prezzo delle opzioni europee con scadenza T in funzione di Δ (o, equivalentemente, di I).

⇒ Fissato un numero reale $\sigma > r\sqrt{\Delta}$ e posto $u(\Delta) = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta}}$, $d(\Delta) = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$, si prova che per $\Delta \to 0$ (o, equivalentemente, $I \to +\infty$), il prezzo delle opzioni tende a quello ottenuto nel modello di Black e Scholes.

Valutazione delle opzioni put americane

(approccio numerico)

Il modello binomiale multiperiodale può essere utilizzato, a ritroso, per valutare anche le opzioni put americane. Tornando, per fissare le idee, al caso $\Delta = 1$ (o $I = T$), si procede come segue:

STEP 1. *Calcolo del payoff finale*: Poni $P_T^{(i)} = \max\left\{K - S_T^{(i)}, 0\right\},\ i = 0,1,\ldots,T$.

STEP 2.*Iterazioni*: Poni $P_t^{(i)} = \max\left\{K - S_t^{(i)}, \mathrm{e}^{-r}\left[qP_{t+1}^{(i)} + (1-q)P_{t+1}^{(i+1)}\right]\right\},$

$$t = T-1, T-2, \ldots, 0 \ \text{ e } \ i = 0,1,\ldots,t.$$

STEP3. *Valore dell'opzione*: Poni $P(0) = P_0^{(0)}$.

<u>Esempio numerico</u>: $S = 1000,\ K = 1000,\ r = 0.1,\ T = 3,\ u = 1.2,\ d = 0.9$

$(\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{r} = 1.10517,\quad q = 0.6839,\quad 1 - q = 0.3161)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1728 \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & 1440 & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 1200 & & & & 1296 \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
1000 & & & & 1080 & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 900 & & & & 972 \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & 810 & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & 729
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 2.291 & & & & 0 \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
10.594 & & & & 8.009 & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 32.082 & & & & 28 \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & 94.838 & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & 271
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 2.291 & & & & 0 \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
30.02 & & & & 8.009 & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 100 & & & & 28 \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & 190 & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & 271
\end{array}
$$

Evoluzione di $S(t)$
(attività sottostante)

Evoluzione di $p(t)$
(put europea)

Evoluzione di $P(t)$
(put americana)

MODELLO DI BLACK E SCHOLES

(Black, Scholes, 1973, Merton, 1973)

Un modello standard che viene tuttora utilizzato dagli operatori per "prezzare" le opzioni, nonostante i suoi limiti, è il modello di Black e Scholes (e Merton). Questi Autori hanno avuto la geniale intuizione di combinare un risultato riguardante i processi stocastici (*Lemma di Ito*) con un ragionamento di tipo economico.

Precisamente, si supponga che l'evoluzione stocastica del prezzo dell'attività sottostante, $S(t)$, sia descritta dal seguente *processo di diffusione*:

$$\mathrm{d}S(t) = a\big(S(t),t\big)\mathrm{d}t + b\big(S(t),t\big)\mathrm{d}W(t),$$

dove a e b sono due funzioni in due variabili reali, $W(t)$ è un processo di Wiener, e $S(0)$ è dato. Si supponga inoltre che tale attività non eroghi dividendi e, di nuovo, che l'attività non rischiosa, data dal money market account, produca interessi al tasso costante r.

Sia ora $y(t)$ un processo stocastico che descrive il valore al tempo t di un derivato (ad esempio un'opzione europea, o un contratto forward, ...). Supponiamo che tale prezzo possa essere espresso come funzione del prezzo corrente del sottostante e del tempo:

$$y(t) = f\big(S(t),t\big),$$

dove f è una funzione in due variabili reali "sufficientemente regolare".

<u>Lemma di Ito</u>:

Il processo $y(t)$ soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\mathrm{d}y(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(S(t),t\big)\mathrm{d}S(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(S(t),t\big)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\big(S(t),t\big)b^2\big(S(t),t\big)\mathrm{d}t,$$

dove x_1 e x_2 indicano la prima e la seconda variabile della funzione f.

<u>Conseguenze</u>:

$\Rightarrow$ Un portafoglio costituito, all'istante t, dal derivato di prezzo $y(t)$ e dalla quantità $-\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(S(t),t\big)$ di attività sottostante è in tale istante non rischioso.

Infatti, indicando con $H(t) = y(t) - \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(S(t),t\big)S(t)$ il valore di tale portafoglio, si ha:

$$\mathrm{d}H(t) = \mathrm{d}y(t) - \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(S(t),t\big)\mathrm{d}S(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(S(t),t\big)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\big(S(t),t\big)b^2\big(S(t),t\big)\mathrm{d}t,$$

che non dipende dal fattore stocastico $\mathrm{d}S(t)$.

$\Rightarrow$ L'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio impone che, nell'istante t, tale portafoglio evolva come il money market account:

$$\mathrm{d}H(t) = rH(t)\mathrm{d}t.$$

Sostituendo $\mathrm{d}H(t)$ e $H(t)$ (e semplificando) si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(S(t),t\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\big(S(t),t\big)b^2\big(S(t),t\big) = ry(t) - r\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(S(t),t\big)S(t).$$

Poiché tale equazione deve essere soddisfatta per tutta la durata di vita del derivato, qualunque sia il prezzo corrente del sottostante, ciò si traduce in un'equazione alle derivate parziali cui deve soddisfare la funzione f. Si ha quindi, portando tutto a primo membro e ricordando che $y(t) = f\big(S(t),t\big)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}b^2 - rf + r\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 = 0.$$

N.B. Si noti che la funzione a è "sparita", e quindi il prezzo f del derivato risulterà da essa indipendente.

In particolare, Black e Scholes assumono che $S(t)$ segua un processo di *moto browniano geometrico*:

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t),$$

dove μ (parametro di *drift*) e $\sigma(>0)$ (parametro di *volatilità*) sono due numeri reali. L'equazione precedente, sostituendo $b = \sigma x_1$, si particolarizza allora come segue:

Equazione di Black e Scholes

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\sigma^2 x_1^2 - rf + r\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 = 0$$

⇒ Questa equazione è soddisfatta dal prezzo di tutti i derivati che verificano le ipotesi precedenti. Quindi non ci si può aspettare che essa ammetta un'unica soluzione. Per risolverla si devono pertanto imporre alcune condizioni al contorno, fra cui quella che definisce il valore (payoff) finale del derivato.

In particolare, nel caso delle opzioni call europee con scadenza T e prezzo di esercizio K tale condizione si traduce come segue:

$$f\left(x_1, T\right) = \max\left\{x_1 - K, 0\right\}.$$

La soluzione del problema differenziale (con questa specifica condizione al contorno) porta infine alla celeberrima

Formula di Black e Scholes

$$c(t) = f\left(S(t),t\right) = S(t)\Phi\left(d_1\right) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi\left(d_2\right), \qquad 0 \le t < T,$$

dove $\quad d_1 = \dfrac{\ln(S(t)/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$

$\Phi =$ funzione di ripartizione di una v.a. con distribuzione normale standard.

N.B. Siccome l'attività sottostante non eroga dividendi, la formula precedente vale anche per le opzioni call americane.

In maniera analoga si potrebbe ricavare il valore di un contratto forward (che già conosciamo), o quello di un'opzione put europea. Però il prezzo di una put può anche essere ricavato da quello della call sfruttando la relazione di put-call parity:

$$\begin{aligned} p(t) &= c(t) - S(t) + K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \\ &= S(t)\left[\Phi\left(d_1\right) - 1\right] - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_2\right) - 1\right] \\ &= K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_2\right) - S(t)\Phi\left(-d_1\right), \qquad 0 \le t < T. \end{aligned}$$

Le formule precedenti possono essere aggiustate per tener conto dei dividendi.

Precisamente, nel caso di dividendi certi, basta sostituire $S(t)-D(t,T)$ al posto di $S(t)$ nella formula (che include la definizione di d_1 e d_2) mentre, nel caso di dividendi nel continuo con intensità q, al posto di $S(t)$ ci va $S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}$.

In pratica, per applicare la formula di Black e Scholes, <u>bisogna stimare soltanto il parametro di volatilità</u> σ (ad esempio facendo ricorso alle serie storiche dei prezzi del sottostante), <u>mentre non occorre stimare il parametro di drift</u> μ (che "sparisce"). Gli altri parametri sono invece direttamente osservabili: in particolare r può essere desunto dal prezzo dei titoli privi di rischio (ad esempio da quello dei BOT) con scadenza coincidente con la scadenza dell'opzione.

Delta-hedging

La derivate parziali del prezzo di un derivato rispetto alle variabili da cui esso dipende hanno un'enorme importanza nelle tecniche di *hedging*. Esse sono solitamente indicate con delle lettere greche. In particolare, la derivata parziale rispetto al prezzo dell'attività sottostante viene indicata con la lettera Delta. Nel modello di Black e Scholes essa è pari a $\Phi(d_1)$ per la call e a $-\Phi(-d_1)$ per la put.

Come abbiamo visto precedentemente se, accanto al derivato, si "detiene" una quantità (con segno) di sottostante pari all'opposto del Delta, il portafoglio così costruito risulta neutralizzato rispetto al rischio di variazioni nel prezzo del sottostante. Tuttavia tale neutralizzazione è (in generale) soltanto istantanea, perché lo stesso Delta (in generale) varia al variare del prezzo del sottostante e al passare del tempo.

Quindi, per mantenere il portafoglio continuamente non rischioso, bisognerebbe ricalibrarlo istante per istante modificando opportunamente la quantità di sottostante.

Questa tecnica di hedging, che va sotto il nome di *Delta-hedging*, si scontra naturalmente con la realtà, sia perché nel mondo reale le transazioni non avvengono in tempo continuo sia, e soprattutto, perché il mondo reale è affetto dalla presenza dei costi di transazione, che rendono proibitivi aggiustamenti troppo frequenti.

<u>Distribuzioni neutrali al rischio</u>

(Harrison e Kreps, 1979, Harrison e Pliska, 1981)

Se $S(t)$ segue un processo di moto browniano geometrico, applicando il Lemma di Ito alla funzione $f\left(x_1, x_2\right) = \ln\left(x_1\right)$, dopo alcuni semplici passaggi si ottiene:

$$S(T) = \mathrm{e}^{\ln\left(S(t)\right) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma\left[W(T) - W(t)\right]} = S(t)\mathrm{e}^{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma\left[W(T) - W(t)\right]}, \qquad 0 \le t < T$$

$\Rightarrow$ Poiché $W(T) - W(t)$ ha distribuzione normale di media 0 e varianza $T - t$, anche $\ln\left(S(T)\right)$ ha, subordinatamente all'informazione disponibile al tempo t, distribuzione normale di media $\ln\left(S(t)\right) + (\mu - \sigma^2/2)(T - t)$ e varianza $\sigma^2(T - t)$;

$\Rightarrow$ $S(T)$ ha <u>distribuzione lognormale</u>.

Si può provare che, anche nel modello di Black e Scholes, esiste unica una distribuzione di probabilità, $\mathbb{Q}$, in base alla quale i prezzi dei derivati si ottengono come speranza matematica del loro payoff finale attualizzato col tasso privo di rischio

$\Rightarrow$ distribuzione neutrale al rischio

- In base a tale distribuzione, $S(T)$ è ancora lognormale, ma il parametro μ viene sostituito dal tasso privo di rischio r (mentre σ rimane invariato).

$\Rightarrow$ La formula di Black e Scholes si può allora ottenere anche calcolando la speranza matematica sotto $\mathbb{Q}$, subordinata allo stato d'informazione disponibile al tempo t, del suo payoff finale attualizzato:

$$c(t) = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\max\left\{S(T)-K,0\right\}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left\{\mathrm{e}^x - K,0\right\}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[x-\ln(S(t))-(r-\sigma^2/2)(T-t)\right]^2}\mathrm{d}x$$

dove $\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}$ indica l'operatore di speranza matematica condizionata (sotto $\mathbb{Q}$).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Black, F. e M. Scholes (1973): “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy* 81(3): 637-54.
- Cox, J.C., Ross, S.A. e M. Rubinstein (1979): “Option Pricing: A Simplified Approach”, *Journal of Financial Economics* 7: 229-63.
- Harrison, M.J. e D. Kreps (1979): “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory* 20: 381-408.
- Harrison, M.J. e S.R. Pliska (1981): “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and Their Applications* 11: 215-260.
- Merton, R.C (1973): “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4: 141-83.