LEZIONE 12 5/10/17

Completo la lezione di ieri.

M_n sp. vett. su $\mathbb{R}$ delle matrici $n \times n$ (quadrate) ad entrate reali. $\dim(M_n) = n^2$

$S_n \subset M_n$: è il sottospazio vett. delle $M \in M_n$ t.c. ${}^tM = M$

Una tale M è detta matrice simmetrica.

$\dim(S_n) = \frac{(n+1)n}{2}$

$A_n \subset M_n$: è il sottospazio vettoriale delle matrici antisimmetriche, cioè ${}^tM = -M$ se $M \in A_n$.

$\dim(A_n) = \frac{n(n-1)}{2}$

è la matrice $n \times n$ ad entrate tutte nulle

Abbiamo verificato che $S_n \cap A_n = \{0\}$

$M \in M_n$ matrice $n \times n$ qualsiasi.

$M + {}^tM \in M_n$ $\quad {}^t(M + {}^tM) = {}^tM + {}^t({}^tM) = {}^tM + M = M + {}^tM$

$\Longrightarrow M + {}^tM \in S_n$

In modo analogo si vede che $M - {}^tM \in A_n$

$(M + {}^tM) + (M - {}^tM) = 2M \quad \Longrightarrow \quad M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in A_n}$

Da questa formula segue, in particolare, che

$S_n + A_n = M_n$ SPIEGARE

Osservo che $\dim(S_n) + \dim(A_n) = \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = n^2 = \dim(M_n)$

U, W sottospazi di V t.c. $U \cap W = \{0_V\}$ (come nell'esempio precedente). Allora si dice che $U + W$ è diretta (somma) e si scrive $U \oplus W$ piuttosto che $U + W$

V spazio vettoriale
U, W sottospazi di V. Vogliamo trovare dim(U+W)
Se $\mathcal{B}$ è una base di U e $\mathcal{C}$ è una base di W,
poiché ogni elemento di U+W si scrive u+w,
con $u \in U$ e $w \in W$, possiamo concludere che
ogni elemento di U+W è combinazione lineare
dei vettori in $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Quindi $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$
è un sistema di generatori per U+W.

$\#(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \leq \#(\mathcal{B}) + \#(\mathcal{C})$ perché $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$
potrebbero avere qualche elemento in comune.
Pertanto:
$\dim(U+W) \leq \#(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \leq \#(\mathcal{B}) + \#(\mathcal{C}) = \dim(U) + \dim(W)$

$\dim(U+W) \leq \dim(U) + \dim(W)$

Nell'esempio precedente valeva l'uguaglianza.
Esaminiamo il 2° esempio di ieri:

U le soluzioni di $3x + 4y - 5z = 0$
W —— " —— $2x + 7y + z = 0$
Abbiamo visto che $\dim(U) = \dim(W) = 2$
$\dim(U) + \dim(W) = 2+2 = 4$ __non__ può essere $\dim(U+W)$.
Infatti U+W è sottospazio di $\mathbb{R}^3$, e quindi
$\dim(U+W) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Ora $U \neq W$; infatti altrimenti $U = W \Rightarrow U \cap W = U$
$\Rightarrow 2 = \dim(U) = \dim(U \cap W) = 1$ assurdo.

Quindi esiste $w \in W$ tale che $\underline{w \notin U}$.
Questo implica che $U \subsetneq U + W$ perché
$w = 0_V + w \in U + W$. Ma allora

$$2 = \dim(U) < \dim(U+W) \leq 3 \implies \underline{\dim(U+W) = 3}$$

Riassumendo, nella situazione dell'esempio si ha:

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$$

1 è proprio la dimensione di $U \cap W$!!!

Ieri abbiamo trovato $t \in U \cap W$ $\ t \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
Quindi $\underline{\{t\} \text{ è una base di } U \cap W}$
Poi abbiamo trovato $u \in U$, con $u \notin U \cap W$.
Allora $\mathcal{B}' = \{t, u\}$ è una base di U.
Analogamente, essendo $w \notin U \cap W$ si ha che
anche $\mathcal{C}' = \{t, w\}$ è una base di W.
Per i ragionamenti fatti in precedenza, allora
$\mathcal{B}' \cup \mathcal{C}' = \{t, u, w\}$ è un <u>sistema di generatori</u> di
$U + W$.
Poiché sappiamo per un'altra via che $\dim(U+W) = 3$,
possiamo concludere che $\{t, u, w\}$ è una base di $U+W$

~ o ~

Tutto questo suggerisce una strategia per trattare
$\dim(U+W)$ in generale.
Sappiamo che se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di U e W risp.,
allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ è un sist. di generatori di $U + W$.

Possiamo trovare una base di $U+W$ "sfoltendo" $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. L'idea è che, se partiamo da basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ "giuste", allora ~~è chiaro~~ lo sfoltimento è automatico!

Seguendo le indicazioni dell'esempietto SPIEG.

- Sia $\{t_1, \dots, t_r\}$ una base di $U \cap W$
- La completo ad una base $\mathcal{B} = \{t_1, \dots, t_r, u_{r+1}, \dots, u_s\}$ di U
- Completo $\{t_1, \dots, t_r\}$ ad una base $\mathcal{C} = \{t_1, \dots, t_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$ di W

Allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{t_1, \dots, t_r, u_{r+1}, \dots, u_s, w_{r+1}, \dots, w_m\}$ (*)

$\#(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ SPIEG.

$\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ è un sistema di generatori per $U+W$

Resta da provare che sono LIN. INDIP.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_s, \nu_{r+1}, \dots, \nu_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_r t_r + \mu_{r+1} u_{r+1} + \dots + \mu_s u_s + \nu_{r+1} w_{r+1} + \dots + \nu_m w_m = 0_V$$

Lo riscrivo:

$$\underbrace{\lambda_1 t_1 + \dots + \mu_s u_s}_{\text{è un vettore in } U} = \underbrace{-\nu_{r+1} w_{r+1} - \dots - \nu_m w_m}_{\in W}$$

sia q tale vettore $q \in U \cap W$

$\notin$ non appartengono a $U \cap W$

Allora $q = 0_V$ perché $\Rightarrow \nu_{r+1} = \dots = \nu_m = 0_{\mathbb{R}}$

$q = 0_V$ si scrive anche $\lambda_1 t_1 + \dots + \mu_s u_s = 0_V \Longrightarrow$

$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \dots = \mu_s = 0_{\mathbb{R}}$ perché $t_1, \dots, t_r, u_{r+1}, \dots, u_s$ è base di U, dunque tali vettori sono lin. indip.

Pertanto l'insieme (*) è una base di $U+W$ ed abbiamo dimostrato che

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)}$$

FORMULA DI GRASSMANN

ESERCIZIO (compito del 14/9/16) $V = \mathbb{R}^3$ $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato da

$$v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad v_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

a) si calcoli $\dim(U)$ e si trovi una base $\mathcal{B}$ di U.

b) si trovi una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$.

OSS. a) è detto male: devo trovare $\mathcal{B}$ per conoscere $\dim(U)$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ è un sistema di generatori per U. Troverò una base di U "sfoltendolo".

Il più "semplice" tra v_1, v_2, v_3 è v_3 perché "contiene" uno zero.

Faccio le operazioni elementari con v_1, v_2, v_3.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \quad v_2 \rightsquigarrow v_2 - v_3 \quad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ v_1 & v_2' & v_3 \end{array} \quad v_1 \rightsquigarrow v_1 - v_3 \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ v_1' & v_2' & v_3 \end{array}$$

$$v_1' - 2v_2' \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ & v_2' & v_1 \end{array}$$

Quindi $\{v_1, v_2'\}$ è una base di U. Anche $\{v_1, v_2\}$ lo è.

$\dim(U) = 2$ a) è completo

mi dice che e_3 è t.c. $\mathcal{C} = \{v_1, v_2', e_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$, senza fare nessun conto. b) è fatto

ESERCIZIO

Si verifichi che $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid y+z-t=0\}$ e $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y=0 \text{ e } z-2t=0\}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$. Si trovino basi per U, W, $U\cap W$ e $U+W$, e si determinino le dimensioni di questi 4 spazi.

U e W sono entrambi insiemi delle soluzioni di un SL omogeneo. Quindi che siano sottosp. vett. di $\mathbb{R}^4$ ce lo dice la teoria.

Anche $U\cap W$ è l'insieme di tutte le soluz. di un SLO

$$\begin{array}{l} U \\ W \end{array}\begin{cases} y+z-t=0 \\ x-y=0 \\ z-2t=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad R_2 \rightsquigarrow R_2 - R$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad R_1 \rightsquigarrow R_1 + R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

l'indeterm. t è param. libero

$$\begin{cases} x=-t \\ y=-t \\ z=2t \end{cases} \qquad U\cap W=\{\underbrace{(-t,-t,2t,t)}_{t(-1,-1,2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$$

Una base per $U\cap W$ è formata dal solo vettore $t=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\dim(U\cap W)=1$

Studio W. la matrice è già a gradini!

$$\begin{cases} x-y=0 \\ z-2t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y \\ z=2t \end{cases}$$ y, t sono parametri liberi

La sol. generale del SLO è $(y,y,2t,t)$ cioè $y(1,1,0,0)+t(0,0,2,1)$ e una base di W è $w_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $w_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dim(W)=2$

Osservo che

$$t = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} = w_1 - w_2 \quad \text{allora} \quad \boxed{w_2 = w_1 - t}$$

Quindi un'altra base di W è data da $\{w_1, t\}$
Per esserne sicurissimo posso verificare, ad esempio
che w_1, t sono LIN. INDIP. In tal caso, 2 el.ti
lin. indip di W sono una base di W perché
W ha dim $= 2$. Cioè $\{w_1, t\}$ è un ~~sist~~ insieme
di vettori lin. indip in W massimale.

Verifico, allora, che w_1, t sono lin. indip.
Lo farò senza usare le loro coordinate (con le coord.
è evidente)

Sia $\lambda w_1 + \mu t = 0_{\mathbb{R}^4}$ per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ opportuni

$t = w_1 - w_2 \implies \lambda w_1 + \mu(w_1 - w_2) = 0$ cioè

$$\left.\begin{matrix}(\lambda+\mu) w_1 - \mu w_2 = 0 \\ w_1, w_2 \text{ lin. indip}\end{matrix}\right\} \implies \left\{\begin{matrix}\lambda + \mu = 0 \\ -\mu = 0 \implies \underline{\mu = 0}\end{matrix}\right\} \implies \underline{\lambda = 0}$$

---

w_1, t è anche un sistema di generatori per W.
Infatti, sia $u \in W$ arbitrario. Allora esistono
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ opportuni tali che $u = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$
cioè

$$u = \alpha_1 w_1 + \alpha_2(w_1 - t) = (\alpha_1 + \alpha_2) w_1 - \alpha_2 t \quad \underline{\text{SPIEG.}}$$

Infine studio U.

pivot.

$y + z - t = 0 \quad [1 \ 1 \ -1]$ ma, <u>attenzione</u>! $y + z - t = 0$
va pensato come un SLO nelle incognite x, y, z, t.
Dunque la vera matrice è $[0 \ 1 \ 1 \ -1]$

Pertanto i parametri liberi sono x, z, t.
La soluzione generale è

$$(x, -z+t, z, t) = x(1,0,0,0) + z(0,-1,1,0) + t(0,1,0,1)$$

Una base di U è formata dai vettori

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad u_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{\dim(U) = 3}$$

Per trovare $\dim(U+W)$ posso usare la form. di Grassman:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3+2-1 = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} U+W \subset \mathbb{R}^4 \text{ sottospazio} \\ \dim(U+W) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \end{array}\right\} \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^4$$

Una base di $U+W$ è, ad esempio, la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Siamo riusciti a completare la soluzione del problema giocando con numeretti (se si sa la teoria ....)