

Esercizi Geometria 1
Foglio 1

Esercizio 1. Determinare quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono soddisfatte dalle seguenti relazioni. In caso la relazione sia una relazione d'equivalenza individuare le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.

1. Nell'insieme delle rette del piano euclideo reale:

$$r\rho r' \Leftrightarrow r \text{ è perpendicolare a } r'$$

2. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi: $x\rho x' \Leftrightarrow |x| = |x'|$

3. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi: $x\rho x' \Leftrightarrow xx' > 0$

4. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi: $x\rho x' \Leftrightarrow xx' \geq 0$

5. Nell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali:

$$x\rho x' \Leftrightarrow x \text{ ha un numero di cifre maggiore od uguale a } x'$$

6. Nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali: $x\rho x' \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$

Esercizio 2. Cosa c'è di errato nella seguente dimostrazione che se una relazione ρ gode della proprietà simmetrica e transitiva allora gode anche della proprietà riflessiva.

“Sia x qualsiasi. Se $x\rho y$ allora per la proprietà simmetrica $y\rho x$ e per la proprietà transitiva $x\rho x$.”

Esercizio 3. 1. In \mathbb{Z}_7 si calcoli per ogni elemento non nullo l'inverso rispetto al prodotto.

2. In \mathbb{Z}_6 e in \mathbb{Z}_8 si individuino quali elementi hanno l'elemento inverso rispetto al prodotto.

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ il campo dei numeri razionali. Si definisca un'ulteriore operazione in \mathbb{Q} ponendo $x \star y = \frac{3}{4}(x \cdot y)$. Si dimostri che $(\mathbb{Q}, +, \star)$ è un campo.