LEZIONE 13 "R×C" 9/10/17 (1

MOLTIPLICAZIONE "RIGHE PER COLONNE" TRA MATRICI

CASO BASE

$A = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}]$ matrice $1\times n$ <u>m. riga</u>

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$ B è matrice $n\times 1$ <u>m. colonna</u>

"SOMMATORIA"

$$AB = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \cdots + a_{1n} b_{n1}}_{} = \sum_{h=1}^{n} a_{1h} b_{h1}$$ per brevità

ESEMPIO Sul Kemeny (vedi LETTURA INTEGRATIVA su Moodle) ci sono altri esempi di questo tipo

a_{1j} sia la quantità della materia prima "j" necessaria per produrre un'unità di un dato prodotto P.

b_{j1} sia il prezzo unitario della materia prima "j".

La matrice A rappresenta "tutto quel che devo usare" per produrre un'unità di P.

AB è uno scalare (in questo caso!), cioè una matrice 1×1.

AB significa "quanto costa produrre un'unità di P".

I prezzi cambiano col tempo.

Per esempio, posso considerare una matrice B, di tipo <u>$n\times p$</u>, con il seguente significato :

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{prezzi nel 2001} & \text{prezzi nel 2003} & \text{prezzi nel 2017} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{prezzi per la materia prima } 1 \\ \leftarrow \text{———— " ———— } 2 \\ \text{- - - - - -} \\ \leftarrow \text{———— " ———— } n \end{array}$$

$(p = 9)$ Scrivo B in modo sintetico, "a blocchi"

(*) $B = [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_p]$ $\quad B_h$ è l'h-esima colonna di B

Allora

$$\underset{1\times \cancel{n}}{A} \ \underset{\cancel{n}\times p}{B} \overset{\text{def}}{=} [\underbrace{AB_1}_{\in\mathbb{R}} \ \underbrace{AB_2}_{\in\mathbb{R}} \ \cdots \ \underbrace{AB_p}_{\in\mathbb{R}}]$$ è una matrice $1\times p$

AB rappresenta com'è variato nel corso degli anni il prezzo di produzione di un'unità di P.

IL CASO GENERALE

A, B due matrici qualsiasi, ad entrate in $\mathbb{R}$

A di tipo $m\times \underline{\underline{n}}$

B di tipo $\underline{\underline{n}}\times p$

Importante! È l'unica richiesta che si fa: il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B.

(In particolare, il prodotto r×c è sempre possibile tra matrici quadrate dello stesso tipo $n\times n$)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

A_k: la k-esima riga di A

B sia come in (*), qui sopra

Allora, applicando

il caso base visto prima:

$$AB \overset{def}{=} \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_p \end{bmatrix}$$

$m \times \cancel{n} \cdot \cancel{n} \times p$

il risultato è la matrice AB, di tipo $\underline{m \times p}$.

cioè

$$\underbrace{(AB)_{ij}}_{\text{riga colonna di } AB} = A_i B_j = [a_{i1} \cdots a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h=1}^{n} \underbrace{a_{ih} b_{hj}}_{\text{fissi}}$$

varia

ESEMPIO

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 2×3 $\quad B = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2×2 <u>matrice identità</u>

AB <u>non</u> si può fare: $2 \times 3 \cdot 2 \times 2$. Invece si può fare

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} = A$$

$2 \times \cancel{2} \cdot \cancel{2} \times 3$ OK

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$2 \times \cancel{3} \cdot \cancel{3} \times 3$ OK

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ & \cdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & & \end{bmatrix} = A$$

<u>Convincersi</u> che se A è una qualsiasi matrice $m \times n$, allora

$$\boxed{I_m A = A = A I_m}$$

ESEMPIO

Per non perdere la mano sui numeri complessi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-i & 2+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2-i & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$3\times\cancel{2} \cdot \cancel{2}\times 4$ OK il risultato sarà una matrice $\underline{3\times 4}$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot(2-i) & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\cdot 1 \\ (2-i)\cdot 0+(2+i)\cdot 0 & (2-i)\cdot\frac{1}{2}+(2+i)(2-i) & (2-i)\cdot 0+(2+i)\cdot 1 & (2-i)\left(-\frac{1}{3}\right)+(2+i)\cdot 1 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot\frac{1}{2}+0\cdot(2-i) & 0\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+0\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2-i & 1 & 1 \\ 0 & 6-i\frac{1}{2} & 2+i & \frac{4}{3}+\frac{4}{3}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ FORMALI DEL PRODOTTO R×C TRA MATRICI

- A, B matrici $m\times \underline{n}$, C matrice $\underline{n}\times p$. Allora

$$\boxed{(A+B)C = AC+BC}$$

Dim.

$A=(a_{ij})$ $\quad B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ $\quad A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

$$[(A+B)\cdot C]_{hk} = \underbrace{(A+B)_h}_{1\times n} \cdot \underbrace{C_k}_{n\times 1} =$$

SPIEG

$$= \begin{bmatrix} a_{h1}+b_{h1} & a_{h2}+b_{h2} & \cdots & a_{hn}+b_{hn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$= (a_{h1}+b_{h1})\cdot c_{1k} + (a_{h2}+b_{h2})\cdot c_{2k} + \cdots + (a_{hn}+b_{hn})\cdot c_{nk} =$$

$$= \underbrace{\{a_{h1}c_{1k}+a_{h2}c_{2k}+\cdots+a_{hn}c_{nk}\}}_{(AC)_{hk}} + \underbrace{\{b_{h1}c_{1k}+b_{h2}c_{2k}+\cdots+b_{hn}c_{nk}\}}_{(BC)_{hk}}$$

$$= (AC)_{hk} + (BC)_{hk} \qquad \forall h=1,\dots,m \qquad \forall k=1,\dots,p$$

ESERCIZIO

Fare l'analoga verifica che, se A è m. $m \times n$ e B, C sono matrici $n \times p$, allora

$$\boxed{A(B+C) = AB + AC}$$

Dopo queste proprietà distributive risp. alla somma di matrici, vale anche la

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

A, B, C matrici di tipo $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$ rispett.

Allora $$\boxed{A(BC) = (AB)C}$$

Vedremo una dim. "semplicissima" tra qualche lezione.

- A, B matr. $m \times n$, $n \times p$ rispett. $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario

$$\lambda(AB) = (\lambda A) \cdot B = A(\lambda B)$$

NON vale la proprietà commutativa

ESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 3 & 1\cdot 10 + 0\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 1 + 2\cdot 3 & (-1)\cdot 10 + 2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 10\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 10\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + (-1)(-1) & 3\cdot 0 + (-1)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 20 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

Ma anche:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

non sono nemmeno dello stesso tipo!

$A \quad m \times n \Rightarrow {}^tA = n \times m$
$B \quad n \times p \Rightarrow {}^tB = p \times n$ } quindi si può fare ${}^tB\,{}^tA \quad p \times m$

AB è di tipo $m \times p \Longrightarrow {}^t(AB) \quad p \times m$

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$?

$AB = (p_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p}} \qquad p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

${}^t(AB) = (q_{ji})_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le i \le m}} \qquad q_{ji} \overset{def}{=} p_{ij}$

Ora $[b_{1j} \; b_{2j} \; \dots \; b_{nj}]$ è la j-esima <u>riga</u> di ${}^tB$

$\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$ è l'i-esima <u>colonna</u> di ${}^tA$. Banalmente

$$q_{ji} = [b_{1j} \; b_{2j} \; \dots \; b_{nj}] \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA}$$

<u>ESEMPIO</u>

A matr. $m \times n$, B matrice $m \times 1 \qquad X \overset{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

X è la matrice $n \times 1$ delle indeterminate.

Allora il prodotto R×C permette di scrivere il solito sistema lineare come

$$AX = B$$

$n \geq 1$ intero fissato. Oggi considereremo <u>solo</u> matrici <u>$n \times n$</u>.
A matrice (<u>quadrata</u>, $n \times n$).

<u>Def.</u> Se esiste una matrice B tale che $\underline{AB = I_n = BA}$
allora A si dice matrice <u>invertibile</u>.
B: matrice <u>inversa</u> di A, si indica con $\underline{A^{-1}}$.

<u>La matrice inversa di A (se esiste) è unica.</u>

Per dimostrare che una certa cosa è unica, in matematica si fa spesso finta che ce ne siano due di tali certe cose. Poi ci si arrabatta a verificare che coincidono.
Nel nostro caso:
siano B, B' due matrici $n \times n$ tali che $AB = BA = I_n$ e $AB' = B'A = I_n$. Allora

$$B' = B' I_n = B'(AB) = (B'A)B = I_n B = B \qquad \underline{\text{SPIEGARE}}$$

<u>ESEMPIO</u>

$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ è invertibile? "Facciamo finta" di sì: $A^{-1} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}$

Allora $AA^{-1} = I_2$. Esplicitamente si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2x + z & 2y + t \\ 5x + 3z & 5y + 3t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y + t = 0 \\ 5x + 3z = 0 \\ 5y + 3t = 1 \end{cases} \qquad \left|\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{scambi di righe.}} \left|\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \rightsquigarrow$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

$x=3 \quad y=-1 \quad z=-5 \quad t=2 \qquad A^{-1}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{vmatrix}$ vediamo se funziona

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cdot 3+1(-5) & 2\cdot(-1)+1\cdot 2\\ 5\cdot 3+3(-5) & 5\cdot(-1)+3\cdot 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6-5 & -2+2\\ 15-15 & -5+6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$

A LORO: verificare che $A^{-1}A=I_2$.

Per matrici 3x3 o più grandi questo metodo non conviene.