$n \geq 1$ intero fissato.
M_n l'insieme di tutte le matrici $n \times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$)
(non mi piace più "M_n" che ho usato finora SPIEG.).

$A \in M_n$ è detta m. invertibile se esiste $B \in M_n$ tale che

$AB = BA = I_n$.
Abbiamo visto ieri che tale B, se esiste, è unica; si indica con A^{-1}, e si chiama la matr. inversa di A.

~ o ~

Presa un'arbitraria $A \in M_n$ ci si presentano due problemi:
1° sapere se A è invertibile o meno
2° se A è invertibile, calcolare A^{-1}.

Vedremo un algoritmo per calcolare A^{-1}. Usandolo su una matrice A non invertibile si perde molto tempo per niente.
Quello che si vorrebbe è un semplice test che ci permetta di risolvere il PBL 1°, prima di imbarcarci con l'algoritmo. Per chiarire cosa intendo, vediamo l'

ESEMPIO

$n = 2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad$ cerco $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ t.c. $\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(*)}$

ed anche $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ $\quad (**)$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(*)} \Longrightarrow \begin{cases} ax+bz = 1 \,/\cdot d \\ cx+dz = 0 \,/\cdot b \end{cases}$$

SPIEG. mi concentro su quest

$$\Rightarrow \begin{cases} adx+bdz=d \\ bcx+bdz=0 \end{cases} \Rightarrow (ad-bc)x = d \xrightarrow[\text{SE } ad-bc \neq 0]{} \boxed{x = \frac{d}{ad-bc}}$$

Per calcolare z uso lo stesso trucco

$$\begin{cases} ax+bz=1 & /\cdot c \\ cx+dz=0 & /\cdot a \end{cases} \qquad \begin{cases} acx+bcz=c \\ acx+adz=0 \end{cases} \Rightarrow (ad-bc)z=-c$$

SE $ad-bc\neq 0$ allora $\boxed{z=\frac{-c}{ad-bc}}$

Da (*) si ricava anche l'altro sistema lineare

$\begin{cases} ay+bt=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}$ se $ad-bc\neq 0$ questo permette di trovare y e t ESERCIZIO

A questo punto ho trovato la matrice $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. Posso verificare (FATELO!) che effettivamente questa verifica la (*) e la (**).

A questo punto abbiamo in mano un test per verificare se una matrice 2x2 è invertibile, facile da usare

ESEMPIO

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\in M_2$ $\qquad 0\cdot 3-1(-5)=5\neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile

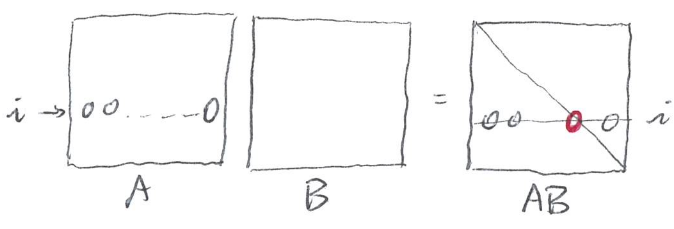
$B=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}\in M_2$ $\qquad 3\cdot 8-(-4)(-6)=24-24=0 \Rightarrow B$ non è invert.

In seguito generalizzeremo questo test al caso di matrici $n\times n$, con n qualsiasi.

~o~

ESEMPIO Se A è una matrice con una riga (oppure una colonna) tutta nulla, allora A non è invertibile.

Infatti, se B è una qualsiasi matrice $n\times n$, calcoliamo AB:



Tutta la i-esima riga di AB è formata da zeri. Dunque $AB\neq I_n$

Fate voi il caso in cui A ha una colonna tutta nulla.

Vediamo l'algoritmo per calcolare l'inversa di una matrice.

- $A=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\in M_2$ $\qquad 2\cdot 3-5\cdot 1=6-5=1\neq 0$ $\quad$ A è invert.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$$ (visto ieri $\pm$)

$$[A\,|\,I_2]=\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\5&3&0&1\end{array}\right]$$

l'idea è di fare le solite operazioni elementari sulle righe di questa matrice, con lo scopo di trasformare la parte a SX in I_2. Se ci riesco, la parte a DX è A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\5&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}5&3&0&1\\2&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&-2&1\\2&1&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&-2&1\\0&-1&5&-2\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to -R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&-2&1\\0&1&-5&2\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\0&1&-5&2\end{array}\right]$$ questa è A^{-1}

- $A=\begin{bmatrix}3&1&2\\2&0&1\\4&3&4\end{bmatrix}$ $\qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc}3&1&2&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\4&3&4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\2&0&1&0&1&0\\4&3&4&0&0&1\end{array}\right]$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\2&0&1&0&1&0\\0&3&2&0&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\0&-2&-1&-2&3&0\\0&3&2&0&-2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\0&-2&-1&-2&3&0\\0&1&1&-2&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\0&-1&0&-4&4&1\\0&1&1&-2&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\0&-1&0&-4&4&1\\0&0&1&-6&5&2\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to -R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\0&1&0&4&-4&-1\\0&0&1&-6&5&2\end{array}\right]$$

$R_1 \longrightarrow R_1 - R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & +4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 5 & 2 \end{array}\right]$ $R_1 \longrightarrow R_1 - R_3$

$\left[\begin{array}{c|ccc} I_3 & 3 & -2 & -1 \\ & 4 & -4 & -1 \\ & -6 & 5 & 2 \end{array}\right]$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ Verificatelo!

Ancora un esempio:

$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $R_1 \longrightarrow R_1 - R_3$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $R_3 \longrightarrow R_3 - 2R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right]$

non posso più andare avanti!
SPIEGARE

Quindi non esiste A^{-1}, cioè A non è invertibile.

"ESERCIZIO"
Fate una tabella con tutte le matrici A di cui abbiamo visto se sono invertibili o meno. Per ciascuno di tali casi calcolate il rango di A ($rg(A)$, vi ricordate?)

A	invertibile?	rg(A) = ?

ESEMPIO

è un'uguaglianza tra matrici

A matrice $n \times n$ invertibile $\quad AX = B$ sistema lineare

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow I_n X = A^{-1}B$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$ È davvero la soluzione? Lo verifico

$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_n B = B$ OK

Vediamo in dettaglio il caso $n=2$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertibile, dunque $ad - bc \neq 0$ $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \qquad A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{d\beta_1 - b\beta_2}{ad-bc} \\ \frac{-c\beta_1 + a\beta_2}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sono le formule di <u>Cramer</u>

$n \geq 1$ intero fissato

$GL(n) = GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n \mid A \text{ è invertibile} \}$

<u>$I_n \in GL(n)$</u>

<u>PROPOSIZIONE</u> Se A, B sono matrici $n \times n$ invertibili, allora anche AB (è una matrice $n \times n$!) è invertibile, e si ha

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

<u>NB.</u> l'ordine dei fattori a secondo membro !!

<u>Dim.</u> Basta verificare se funziona

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) \underset{\uparrow \text{ pr. assoc.}}{=} A(BB^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Analogamente si vede che $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. ∎

Dunque $A, B \in GL(n) \implies \overbrace{AB}^{\text{è un'unica matrice}} \in GL(n)$

Cioè in $GL(n)$ ho un' <u>operazione</u>

Questa è <u>associativa</u> perché il prodotto R×C di matrici lo è.

Inoltre, tale operazione ha <u>elemento neutro</u>: I_n.

Infine, per ogni $A \in GL(n)$ esiste <u>$A^{-1} \in GL(n)$</u> t.c.

<u>$(A^{-1})^{-1} = A$</u>

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Tale operazione in $GL(n)$ <u>non è commutativa</u>