TASSI EQUIVALENTI NEL REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE E DELLA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Finora abbiamo considerato leggi di capitalizzazione $f(t)$ $t \geq 0$

con t durata misurata in anni e parametro
i tasso annuo di interesse

Nel regime dell'interesse semplice: $f(t) = 1 + i \cdot t$

Nel regime della capitalizzazione composta: $f(t) = (1+i)^t$

Si pone il problema di utilizzare per le durate temporali diverse unità di misura, per esempio i semestri oppure i mesi. A tale fine si introduce il concetto di **equivalenza** tra il <u>tasso annuo di interesse</u> i ed il <u>tasso periodale di interesse</u> i_m riferito ad una durata pari ad $\frac{1}{m}$-esimo d'anno, essendo:

i l'interesse che matura su €1 in 1 anno

i_m l'interesse che matura su €1 in $\frac{1}{m}$-esimo d'anno

ES: se $m = 2$ allora $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ d'anno, quindi i_2 è riferito ad una durata pari ad un semestre.

Definizione:

Il tasso annuo di interesse i ed il tasso di interesse periodale i_m si dicono **equivalenti** se, a fronte dell'impiego dello stesso capitale C e per la stessa durata di t anni, producono lo stesso montante.

Condizione di equivalenza tra i tassi i ed i_m nel regime dell'interesse semplice:

$$C(1+i\cdot t)=C(1+i_m\cdot m\cdot t)$$

Quindi, i tassi di interesse i ed i_m si dicono **equivalenti nel regime dell'interesse semplice,** se e soltanto se

$$i=i_m\cdot m \qquad \text{ovvero} \qquad i_m=\frac{i}{m}$$

Condizione di equivalenza tra i tassi i ed i_m nel regime della capitalizzazione composta:

$$C(1+i)^t=C(1+i_m)^{m\cdot t}$$

Quindi, i tassi di interesse i ed i_m si dicono **equivalenti** nel regime della capitalizzazione composta, se e soltanto se

$$1+i=(1+i_m)^m \qquad \text{ovvero} \qquad (1+i)^{1/m}=1+i_m$$

Quindi $\quad i=(1+i_m)^m-1 \quad$ e $\quad i_m=(1+i)^{1/m}-1$

Spesso nella pratica invece di indicare il tasso periodale di interesse i_m riferito ad una durata pari ad $\frac{1}{m}$-esimo d'anno, si indica il **tasso annuo nominale convertibile m volte all'anno**

$$j_m = m \cdot i_m$$

Esempio: nel caso delle obbligazioni, abbiamo definito il **tasso cedolare** $\frac{I}{C}$

dove I è l'ammontare della cedola; C è il valore facciale o valore nominale

Se τ è la durata (in anni) tra due scadenze cedolari, cioè la periodicità di pagamento delle cedole, il tasso cedolare è riferito alla durata di τ anni

Abbiamo poi definito il **tasso annuo nominale**

$$\frac{I \cdot \frac{1}{\tau}}{C} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{I}{C}$$

Si tratta del tasso annuo nominale convertibile $\frac{1}{\tau}$ volte all'anno, corrispondente al tasso cedolare $\frac{I}{C}$

Interpretazione del rateo di interesse

Il **rateo di interesse** è dato da $A = I \dfrac{t-t_0}{t_1-t_0}$

Indicata con $\tau = t_1 - t_0$ la periodicità (in anni) di pagamento delle cedole, si ha

$$A = I \frac{t-t_0}{t_1-t_0} = I(t-t_0)\frac{1}{\tau} = I \cdot t'$$

dove $t - t_0$ è la durata di tempo, dallo stacco dell'ultima cedola, misurata in anni

$t' = \dfrac{t-t_0}{t_1-t_0} = (t-t_0)\dfrac{1}{\tau}$ è la durata di tempo dallo stacco dell'ultima cedola, misurata in τ-esimi d'anno

Quindi il rateo si può interpretare come interessi nel regime dell'interesse semplice:

$A = C\left(\dfrac{I}{C}\cdot\dfrac{1}{\tau}\right)\cdot\left(t-t_0\right)$ sull'importo C al tasso $\left(\dfrac{I}{C}\cdot\dfrac{1}{\tau}\right)$ per la durata di $\left(t-t_0\right)$ anni

$A = C\dfrac{I}{C}(t-t_0)\dfrac{1}{\tau} = C\dfrac{I}{C}\cdot t'$ sull'importo C al tasso $\dfrac{I}{C}$ per la durata $t' = (t-t_0)\dfrac{1}{\tau}$ misurata in τ-esimi d'anno