 APPLICAZIONI LINEARI

N.B. !

ESEMPIO 1

A matrice $m \times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$, fissata. $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

sia l'applicazione (prodotto R×C)

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \longmapsto L_A(v) \overset{def}{=} \underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^m \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Poiché il prodotto R×C è distributivo risp. alla somma, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$L_A(v+w) = A\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = L_A(v) + L_A(w)$$

Analogamente, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$L_A(\lambda v) = A\left(\lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = \lambda A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda L_A(v)$$

ESEMPIO 2

U spazio vett. su $\mathbb{R}$. $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ sia una base di U. ($(u_1, \dots, u_n)$ base ordinata)

$\forall t \in U$ esistono, unici $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{t = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n}$

Abbiamo così un'applicazione

$K_{\mathcal{B}} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ def. da $K_{\mathcal{B}}(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ se vale $\forall t \in U$.

Se $w = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$ è un altro el.to arbitrario di U:

$t + w = (a_1 + b_1) u_1 + \dots + (a_n + b_n) u_n$, quindi

$$K_{\mathcal{B}}(t+w) = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = K_{\mathcal{B}}(t) + K_{\mathcal{B}}(w)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda t = (\lambda a_1) u_1 + \dots + \lambda(a_n) u_n$, e si ha $K_{\mathcal{B}}(\lambda t) = \lambda K_{\mathcal{B}}(t)$

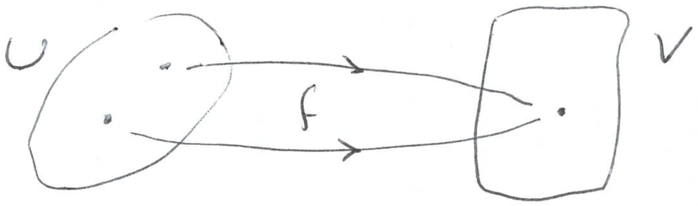
$K_{\mathcal{B}}$ è un'applicazione biiettiva, cioè iniettiva e suriettiva.

Def.

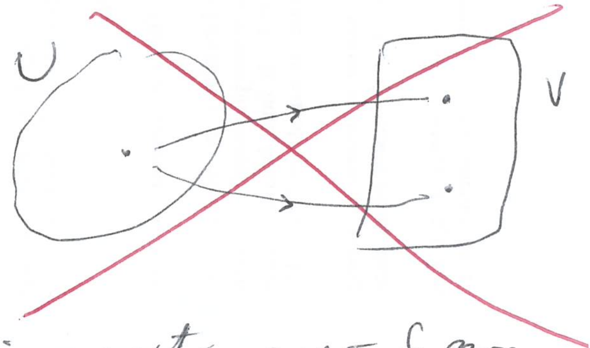
Siano U, V spazi vettoriali su(llo stesso campo) $\mathbb{R}$. Sia $f: U \longrightarrow V$ un'applicazione; cioè f è una "legge" che associa ad ogni el.to di U uno ed un solo elemento di V.

per esempio: $f(u) = 0_V \quad \forall u \in U$ va benissimo.

Osserviamo che vi possono essere diversi elementi di U, a ciascuno dei quali è associato lo stesso elemento di V. Cioè



è perfettamente possibile



in questo caso f non sarebbe un'applicazione

Allora f è detta un' APPLICAZIONE LINEARE se valgono entrambe le condizioni:

$$f(u+u') = f(u)+f(u') \qquad \forall u, u' \in U$$
$$f(\lambda u) = \lambda f(u) \qquad \forall u \in U,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

IMP.: entrambe le uguaglianze si possono "leggere" nei due versi.

Si dice che f "rispetta" le operazioni nei due spazi vettoriali. Le applicazioni lineari permettono di mettere in relazione tra loro due spazi vettoriali (sullo stesso campo).

Supponiamo $f: U \longrightarrow V$ applicazione lineare. Allora

- $f(0_U) = 0_V$

Infatti, preso un qualsiasi $u \in U$, si ha:

$$f(0_U) = f(0_{\mathbb{R}} \cdot u) = 0_{\mathbb{R}} \underbrace{f(u)}_{\in V} = 0_V.$$

$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3) =$

- $f(-u) = f(\underset{= \text{"}\lambda\text{"}}{(-1)} \cdot u) = (-1)\, f(u) = \underline{-f(u)}$

NUCLEO ed IMMAGINE di $f : U \longrightarrow V$ APPL. LINEARE

$\mathrm{Ker}(f) \overset{def}{=} \{ u \in U \mid f(u) = 0_V \} \subset U$ è detto NUCLEO di f

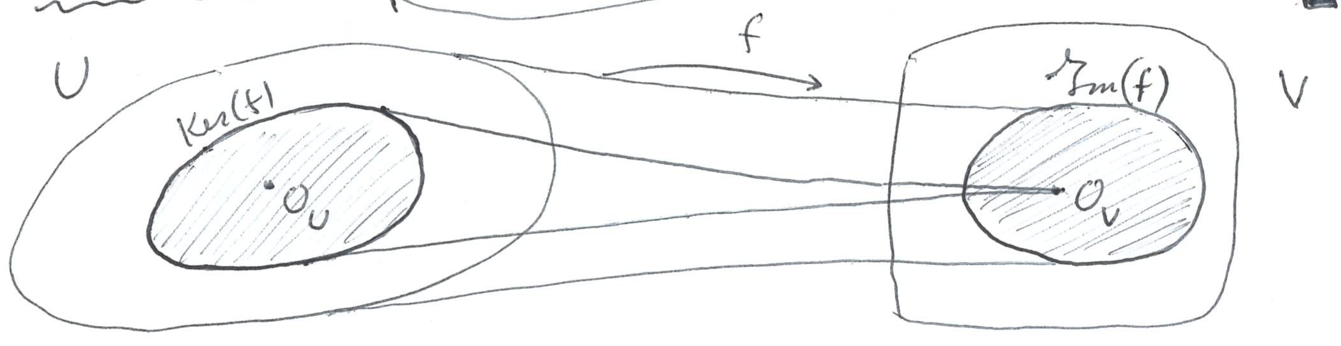
$\mathrm{Im}(f) \overset{def}{=} \{ v \in V \mid \exists\, u \in U \text{ t.c. } f(u) = v \} = \{ f(u) \mid u \in U \} \subset V$
è detto IMMAGINE di f

PROPOSIZIONE

$\mathrm{Ker}(f)$ è un sottospazio vettoriale di U.
$\mathrm{Im}(f)$ —— " —— V.

Dim.
- Abbiamo già visto che $f(0_U) = 0_V$, quindi $0_U \in \mathrm{Ker}(f)$.
(ed anche $0_V \in \mathrm{Im}(f)$).
- Inoltre, per $u, u' \in \mathrm{Ker}(f)$ arbitrari si ha
$f(u + u') = f(u) + f(u') = 0_V + 0_V = 0_V \Rightarrow u + u' \in \mathrm{Ker}(f)$
- Per $u \in \mathrm{Ker}(f)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrari si ha
$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda \cdot 0_V = 0_V \Rightarrow \lambda u \in \mathrm{Ker}(f)$.

- Qui sopra abbiamo osservato che $0_V \in \mathrm{Im}(f)$
- Se $f(u), f(u') \in \mathrm{Im}(f)$ sono arbitrari, allora
$f(u) + f(u') = f(u + u') \in \mathrm{Im}(f)$. COMMENTARE
- Per $f(u) \in \mathrm{Im}(f)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrari
$\lambda f(u) = f(\lambda u) \in \mathrm{Im}(f)$. ∎



$f: U \longrightarrow V$ lineare. **11/10/17** (4

f è suriettiva $\Longleftrightarrow$ $Im(f) = V$

f è iniettiva $\Longleftrightarrow$?

Prendiamola larga.

Fissiamo $u_0 \in U$ $\quad f(u_0) = v_0 \in V$

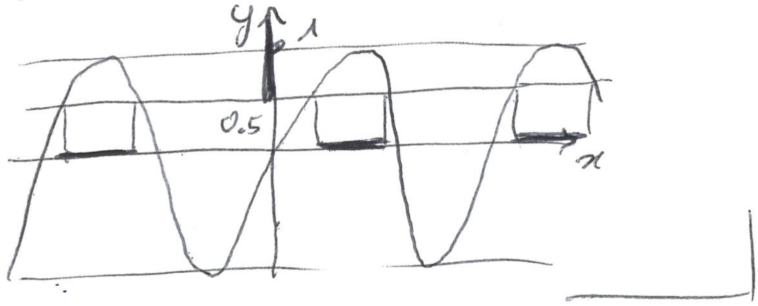
<u>PBL</u> Com'è "fatto" l'insieme di tutti gli $u \in U$ tali che $f(u) = f(u_0) = v_0$? $\{u \in U \mid f(u) = v_0\} \overset{def.}{=} \underline{f^{-1}(v_0)}$

$f^{-1}(v_0)$ è detto <u>CONTROIMMAGINE</u> di v_0 tramite f

<u>Non</u> è in ballo alcuna "applicazione inversa" (o "funzione inversa").

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = sen(x) \quad B = [0.5, +\infty)$

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid sen(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} \mid sen(x) \geq 0.5\}$



$f(u) = v_0 = f(u_0) \Longleftrightarrow f(u) - f(u_0) = 0_V \Longleftrightarrow f(u) + f(-u_0) = 0_V$

$\Longleftrightarrow f(u - u_0) = 0_V \Longleftrightarrow u - u_0 \in Ker(f)$

$f^{-1}(f(u_0)) = \{u_0 + w \mid w \in Ker(f)\} = u_0 + Ker(f) \quad (1)$

← SPIEG.

<u>PROPOSIZIONE</u>

è un'ipotesi "qualitativa" su f

$f: U \longrightarrow V$ applicazione <u>lineare</u>. Allora

f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ $Ker(f) = \{0_U\}$.

<u>Dim.</u> Sia f iniettiva, e sia $u \in Ker(f)$ arbitrario. Allora

f iniettiva

$f(u) = 0_V = f(0_U) \Longrightarrow u = 0_U$ Dunque $Ker(f) = \{0_U\}$.

Viceversa, supponiamo che sia $Ker(f) = \{0_U\}$.
Se $u, u' \in U$ sono tali che $f(u) = f(u')$, allora abbiamo visto sopra che $u - u' \in Ker(f)$. Quindi $u - u' = 0_U$ cioè $u = u' + 0_U = u'$. Dunque f è iniettiva. ■

ESEMPIO 3 (è un caso particolare dell'Esempio 1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad f = L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sia la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$u = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ arbitrario $\quad u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

$$L_A(u) = L_A(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \overset{\text{COMMENTARE}}{=} a_1 \underbrace{L_A(e_1)} + a_2 \underbrace{L_A(e_2)} + a_3 \underbrace{L_A(e_3)}$$

fissi.

Dunque $\{L_A(e_1), L_A(e_2), L_A(e_3)\}$ è un sistema di generatori per $Im(L_A)$. Tali vettori sono le colonne di A:

(1) $L_A(e_1) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L_A(e_2) = \ldots = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L_A(e_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

In modo un po' diverso (ma è meglio ↑)

$$L_A(u) = A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 - a_3 \\ a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 - 2a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ sono lin. indip.? Per scoprirlo faccio operazioni elementari sulle colonne di A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sono uguali.

Dunque $Im(L_A)$ ~~[illegible]~~ ha per base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \implies \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 2$$

Grazie all (1) le operazioni elementari fatte sopra si possono interpretare così:

$$L_A(e_2) - L_A(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = L_A(e_3) + 2L_A(e_1) \quad \text{cioè}$$

$$L_A(e_2 - e_1) = L_A(e_3 + 2e_1) \quad \text{da cui} \quad L_A(\overbrace{e_3 + 2e_1 - (e_2 - e_1)}^{\in \mathrm{Ker}(L_A)}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$e_3 + 2e_1 - e_2 + e_1 = 3e_1 - e_2 + e_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(L_A)$$

Lo si può verificare facilmente eseguendo

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \ldots$$

Se vogliamo determinare $\mathrm{Ker}(L_A)$:

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \left\{ \underset{u}{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \underbrace{A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{L_A(u)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

è il SLO assoc. alla matrice A ! (in sostanza ....)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

non serve scriverlo esplicitamente. Applichiamo l'algoritmo di elim. di Gauss.

i pivots

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 è parametro libero e la soluzione generale è, allora

$(3x_3, -x_3, x_3) = x_3(3, -1, 1) \quad x_3 \in \mathbb{R}$ ovvero

una **base** di $\mathrm{Ker}(L_A)$ è data da $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 1$

Quest'"invasione" dei S.L. è utile: si può calcolare esplicitamente riguardo ad L_A; o, viceversa, si può interpretare geometricamente la soluzione del SL $AX=B$ $B\in\mathbb{R}^3$ arbitrario.

Per esempio, fissato $B\in\mathbb{R}^3$

$AX=B$ è compatibile $\iff$ $B\in \mathrm{Im}(L_A)$ $\iff$

per $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ opportuni $B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \beta\\ \alpha\end{bmatrix}$

Prendiamo un tale $B_0\in\mathbb{R}^3$ e risolviamo il SL $AX=B_0$, cioè:

$$\begin{cases} \cancel{x_1+2x_2-x_3=\alpha+\beta} \\ x_2+x_3=\beta \\ x_1+x_2-2x_3=\alpha \end{cases}$$

] è la somma della seconda e terza equazione

Una soluzione particolare di questo SL è, allora

$x_3=0$ $\Rightarrow$ $x_2=\beta$ & $x_1=\alpha-\beta$

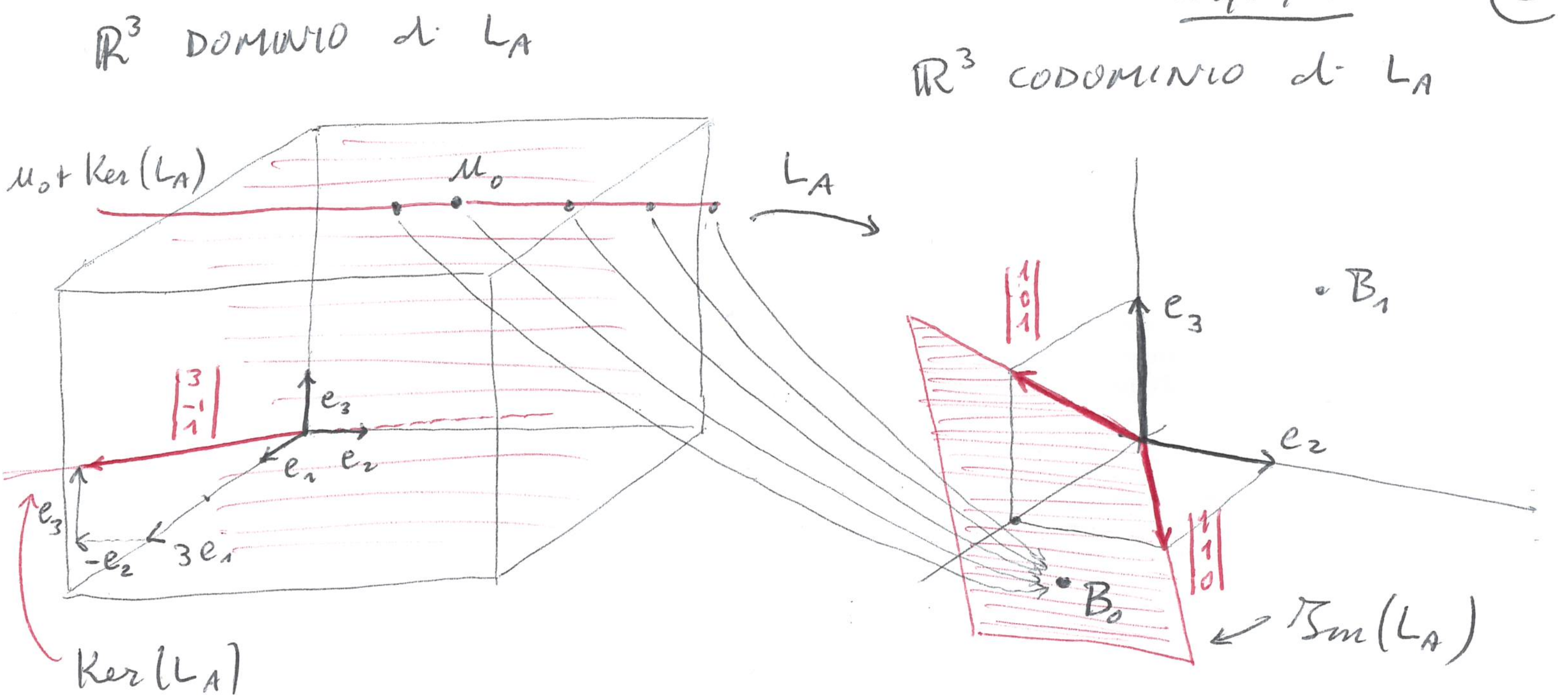
scelta a capocchia, cioè: arbitrariamente.

$u_0=\begin{bmatrix}\alpha-\beta\\ \beta\\ 0\end{bmatrix}$ La soluzione generale del SL $AX=B_0$ è, quindi:

$$\underset{w\in \mathrm{Ker}(L_A)}{u_0+w} = \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha-\beta\\ \beta\\ 0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}}_{} = \begin{bmatrix}\alpha-\beta+3\lambda\\ \beta-\lambda\\ \lambda\end{bmatrix} \quad \lambda\in\mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

da un punto di vista GEOMETRICO questa si capisce meglio.

Rappresento le cose graficamente:



- $Ker(L_A)$ è una retta in.
- $u_0 + Ker(L_A)$ è <u>la</u> retta passante per u_0, parallela a $Ker(L_A)$
- Tutto l'$\mathbb{R}^3$ dominio di L_A si ottiene come unione di infinite <u>rette</u>, tutte parallele tra loro ("pacco di spaghetti").
- $B_1 \notin Im(L_A) \Rightarrow L_A^{-1}(B_1) = \emptyset \iff AX = B_1$ non è compatibile.

In "generale" $\quad A \quad m \times n \qquad L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

- $Ker(L_A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ formato da tutte le soluzioni del SLO $AX = 0$.
- $Im(L_A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A. È formato da tutti i vettori $B \in \mathbb{R}^m$ per i quali il SL $AX = B$ è compatibile.
- Se $B \in Im(L_A)$, allora ("TEOREMA di STRUTTURA")

$$\{\text{soluzioni di } AX = B\} = u_0 + Ker(L_A)$$

u_0 ⊾ sol. <u>particolare</u> di $AX = B$

- <u>OSSERVAZIONE</u>

Se $B \neq 0_{\mathbb{R}^m}$, allora $u_0 + Ker(L_A)$ <u>non</u> è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.