LEZIONE 16

U, V sp. vettoriali $/\mathbb{R}$ $\quad f: U \to V$ appl. lineare, cioè:

a) $f(u+u') = f(u) + f(u')$ $\quad \forall u, u' \in U$

b) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ $\quad \forall u \in U, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$u_1, \dots, u_m$ sia una <u>base</u> di U. Allora $\forall u \in U$ <u>esistono</u> e sono <u>unici</u> $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tali che $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$. Applico f ad entrambi i membri:

$$f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m) \underset{a), b)}{=} \alpha_1 \underline{f(u_1)} + \dots + \alpha_m \underline{f(u_m)} \qquad (1)$$

FISSI!

Cioè: so calcolare f per qualsiasi vettore di U se conosco i valori (in V) che assume f su ciascun elemento di una fissata base di U. Tali valori sono $f(u_1), \dots, f(u_m)$ naturalmente, e sono dei vettori di V.

Il tutto si precisa nel

<u>TEOREMA di DETERMINAZIONE di UN'APPLICAZIONE LINEARE</u>

Siano U, V due qualsiasi spazi vettoriali $/\mathbb{R}$, e sia $\{u_1, \dots, u_m\}$ una <u>base</u> di U. Allora, <u>presi comunque</u> dei vettori $v_1, \dots, v_m \in V$, <u>esiste</u> ed <u>è unica</u> un'applicazione lineare $f: U \to V$ tale che $\underline{f(u_i) = v_i}, \underline{\forall i}$

<u>SPIEGARE!!!</u>

Dim. Il ragionamento fatto sopra prova che (se una tale f esiste, allora) <u>f è unica</u>.

Proviamo che esiste una f che verifica le richieste.

Preso $w \in U$ arbitrario, <u>esistono</u> e sono <u>unici</u> $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ in $\mathbb{R}$ t.c. $w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$. Allora definiamo

(2) $\quad f(w) \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in V$

Questa è una "legge" che permette di associare ad ogni elemento di U uno ed un solo el.to di V

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sono unici

Dunque la (2) definisce un'applicazione $f: U \to V$.

Preso come w un qualsiasi elemento della base fissata di U, sia u_i, gli α_j corrispondenti sono

$$\alpha_1 = 0 \quad \ldots \quad \alpha_{i-1} = 0 \quad \alpha_i = 1 \quad \alpha_{i+1} = 0 \quad \ldots \quad \alpha_m = 0$$

Allora, per ogni $i = 1, \ldots, m$ si ha:

$$f(u_i) = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_m = 1 \cdot v_i = v_i$$

Resta da verificare che f è lineare.

$w \in U$ sia come sopra e $t \in U$ sia un altro vettore (può benissimo essere $t = w$). $t = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m$.

Allora

$$f(w+t) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m) =$$

$$= f((\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \ldots + (\alpha_m + \beta_m) u_m) \underset{(2)}{=}$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_m + \beta_m) v_m = \text{il solito miscia e frulla}$$

$$= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m =$$

$$= f(w) + f(t)$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è arbitrario, allora $\lambda w = (\lambda \alpha_1) u_1 + \ldots + (\lambda \alpha_m) u_m$.

Quindi

$$f(\lambda w) = (\lambda \alpha_1) v_1 + \ldots + (\lambda \alpha_m) v_m = \ldots = \lambda (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m) =$$

$$= \lambda f(w)$$

<u>PROPOSIZIONE</u> U, V, T sp. vettoriali su $\mathbb{R}$.

$f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow T$ applicazioni lineari

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} T$$
$$u \longmapsto f(u) \longmapsto g(f(u)) \overset{def}{=} (g \circ f)(u)$$

si definisca così una nuova applicazione $\underline{g \circ f} : U \longrightarrow T$,

la composizione di f e g (notare l'ordine in cui son scritte), o applicazione composta.

$g \circ f$ è ancora un'applicazione lineare.

<u>Dim.</u> Presi $u, u' \in U$ arbitrari, si ha

$$(g \circ f)(\underset{\text{in } U}{u + u'}) = g[f(u+u')] \underset{f \text{ è lineare}}{=} g[f(u) \underset{\text{in } V}{+} f(u')] \underset{g \text{ è lin}}{=} g(f(u)) \overset{\text{in } T}{+} g(f(u')) =$$

$$= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(u')$$

<u>ESERCIZIO</u>: giustificare le varie uguaglianze in

Inoltre, $\forall u \in U$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(\lambda u) = g[f(\lambda u)] = \cancel{\lambda g[f(u)]} = g[\lambda f(u)] = \lambda g[f(u)] =$$
$$= \lambda (g \circ f)(u)$$

■

<u>PROPOSIZIONE</u> U, V spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow V$ sia un'applicazione <u>lineare</u>, <u>biiettiva</u>. Allora:

1) $\dim(U) = \dim(V)$

2) Essendo f biiettiva, esiste l'applicazione <u>inversa</u> $f^{-1} : V \longrightarrow U$. Allora f^{-1} è un'applicazione <u>lineare</u>.

<u>Dim.</u> Dimostriamo 1). La 2): a <u>LORO</u>, per ESERCIZIO.

Sia $u_1, \dots, u_n$ una base di U. È suff. provare che

$f(u_1), \ldots, f(u_m)$ è una base di V.

- Verifichiamo che $f(u_1), \ldots, f(u_m)$ sono vettori (di V) <u>linearmente indipendenti</u>.

Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_m f(u_m) = 0_V$

f è lineare, quindi COMMENTARE:

$$f(\underbrace{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m}_{\text{questo è un (unico!) vettore di } U}) = 0_V \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m \in Ker(f)$$

Ma f è iniettiva, dunque $Ker(f) = \{0_U\}$. Quindi

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0_U$$

Ma $u_1, \ldots, u_m$ sono lin. indip perché sono una base di U. Dunque $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$.

- Verifichiamo che $f(u_1), \ldots, f(u_m)$ sono un <u>sistema di generatori</u> per V.

Sia $v \in V$ arbitrario. Poiché f è suriettiva, esiste $u \in U$ tale che $f(u) = v$. Ma $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ per opportuni scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Quindi

$$v = f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_m f(u_m)$$ ■

~ o ~

U sp. vett. /$\mathbb{R}$ $\dim(U) = n$

Fissata una base $\mathcal{B}$ di U, <u>ordinata</u>, ieri abbiamo visto che esiste un'applicazione <u>lineare</u>, <u>biiettiva</u>

$$U \xrightarrow{K_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^n$$

IDEE GEOMETRICHE   POSSIBILITÀ di CALCOLARE

Approfondiamo questo punto di vista.

$f : U \longrightarrow V$ appl. lineare

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ base ordinata di U

$\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m)$ " " " V

Allora ho la situazione:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "K_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{C}}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, shift right, "K_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$K_{\mathcal{B}}$ iniettiva $\Rightarrow$ esiste $K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ ed è lineare

Voglio capire chi è l'appl. lineare $K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Considero la base canonica (ordinata) di $\mathbb{R}^n$: $(e_1, \dots, e_n)$

Per definizione di $K_{\mathcal{B}}$ ho che $K_{\mathcal{B}}(u_i) = e_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Quindi $K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i) = u_i \quad \forall i$.

Inoltre, sia

$$f(u_i) = a_{1i} v_1 + \dots + a_{mi} v_m \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Allora

$$\underset{\underset{\displaystyle (K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1})(e_i)}{\shortparallel}}{K_{\mathcal{C}}\left[f(u_i)\right]} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \forall i$$

Considero la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

di tipo $m \times n$

Allora ho anche l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$$L_A(e_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, n \qquad L_A(e_i) = (K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1})(e_i)$$

Riassumendo, abbiamo due applicazioni lineari

$$\mathbb{R}^n \underset{L_A}{\overset{K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}^m$$

che assumono lo stesso valore di $\mathbb{R}^m$ per ogni elemento della base canonica di $\mathbb{R}^n$

Per l'unicità nel "Teorema di determinazione di un'applicazione lineare" possiamo concludere che

$$\boxed{K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1} = L_A}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"', "\text{lin. e biiett.}"] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{C}}", "\text{iden}"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

<u>idee geometriche</u>

la traduzione

<u>conti</u>

Il fatto che $K_{\mathcal{B}}$ sia lineare e biiettiva fa sì che i vettori di U si comportino rispetto alle operazioni di spazio vettoriale ed ai concetti correlati <u>nello stesso modo</u> dei loro corrispondenti in $\mathbb{R}^n$. Per esempio, se $W \subset U$ è sottospazio vettoriale, allora $K_{\mathcal{B}}(W)$ sarà sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
Oppure, se $t_1, \dots, t_k \in U$ sono lin. indip., allora $K_{\mathcal{B}}(t_1), \dots, K_{\mathcal{B}}(t_k)$ sono vett. lin. indip. di $\mathbb{R}^n$.
Ne segue $\dim(W) = \dim(K_{\mathcal{B}}(W))$

Insomma, è come chiamare le stesse cose con due nomi diversi.
Infatti vale anche il viceversa perché $K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ è lineare e biiettiva.

$K_{\mathcal{B}}$ si dice ISOMÖRFISMO tra gli spazi U e $\mathbb{R}^n$

Ogni applicazione lineare, biettiva, si dice isomorfismo tra gli sp. vett. U e V. $f: U \longrightarrow V$

Per essa valgono le stesse considerazioni fatte sopra. U e V si dicono isomorfi

Sia T uno sp. vett. sul campo $\mathbb{R}$, e sia $\dim(T) = n$. Fissata una qualsiasi base ordinata $\mathcal{C}$ di T, abbiamo l'isomorfismo

$K_{\mathcal{C}} : T \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Ma allora anche

$$U \xrightarrow{K_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{K_{\mathcal{C}}^{-1}} T$$ è un isomorfismo

Cioè, due spazi vettoriali della stessa dimensione sono sempre isomorfi. Cioè, "sostanzialmente" sono lo stesso spazio vettoriale!

La dimensione mi dice TUTTO su U!!!

~o~o~

$f: U \longrightarrow V$ lineare $\mathcal{B}$ base ordinata di U, $\mathcal{C}$ base ordinata di V come sopra

A si dice la matrice associata ad f, rispetto alle basi ~~$\mathcal{C}$~~ $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ $\quad A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_n) \end{matrix} & \end{array}$$

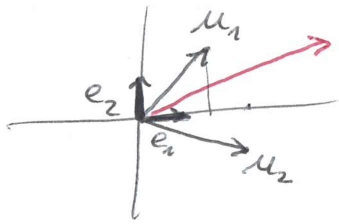
$$\boxed{f(u_i) = a_{1i} v_1 + \dots + a_{mi} v_m}$$

$\forall i$

Si verifica facilmente che
$u_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$, $u_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$ sono due elementi lin. indipend. di $\mathbb{R}^2$. Quindi $\mathcal{B}=(u_1, u_2)$ è base ordinata di $\mathbb{R}^2$.
Vorrei un metodo efficiente per ottenere le coordinate di un vettore $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2$ rispetto a tale base $\mathcal{B}$. Cioè:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

chi sono α_1, α_2?



$$\underset{(e_1, e_2)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{id} \underset{(u_1, u_2)}{\mathbb{R}^2} \qquad \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{vmatrix}$$

ma è lo stesso vettore

$id(v) = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$
è lineare

Conviene fare così: $\underset{(u_1, u_2)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{id} \underset{(e_1, e_2)}{\mathbb{R}^2}$

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{matrix} \right] \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underset{u_1}{\overset{\shortparallel}{id(u_1)}} & \underset{u_2}{\overset{\shortparallel}{id(u_2)}} \end{matrix} \end{array}$$

La matrice che io cerco veramente è quella che mi permette di fare il passaggio opposto (vedremo la prossima lezione), cioè A^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \rightsquigarrow$$