ESERCIZI VARI su MATRICI

Si giustifichi la risposta ad ogni esercizio (o parte di esercizio) posto in forma di domanda.

Esercizio 1. Una matrice di tipo $n \times n$, ad entrate reali è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j ; è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j .

- Verificare che ogni matrice simmetrica 3×3 ad entrate reali è combinazione lineare delle matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- L' insieme di tutte le matrici simmetriche di tipo 3×3 ad entrate reali è un sottospazio di $\mathscr{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$? Se si, trovane una base.

- Si può dire qualcosa di simile per le matrici antisimmetriche ?

Esercizio 2. Data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

esegui i seguenti prodotti righe per colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} A \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} A \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} A \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} A$$

Cosa osservi in particolare ? Prova a costruire esempi simili.

Esercizio 3. Data la matrice

$$B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

esegui i seguenti prodotti righe per colonne

$$B\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

Anche in questo caso prova a costruire esempi simili. Cosa osservi in particolare ? Qual' è la differenza con l' esercizio precedente ?

Esercizio 4. Vedere se ciascuna delle seguenti matrici è invertibile e, in caso affermativo, trovare la sua matrice inversa

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1&3&4\\-1&5&1\\3&-1&6\end{vmatrix}$$

Esercizio 5. Si calcoli la matrice inversa di

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{vmatrix}$$

Esercizio 6. Sia A una matrice $n\times n$ strettamente triangolare (superiore), cioè della forma

$$\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\0&0&a_{23}&\dots&a_{2n}\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&a_{n-1,n}\\0&0&0&\dots&0\end{vmatrix}$$

Si provi (per induzione su n) che $A^n = 0$.

Esercizio 7. Per ciascuna delle due matrici A

$$A = \begin{vmatrix}1&-2&9\\4&-7&-31\\-2&4&18\\3&-5&-22\end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix}2&-8&1&-1\\5&-20&-4&-22\\-3&12&5&21\end{vmatrix}$$

trovare due matrici invertibili P e Q tali che PAQ sia della forma a blocchi

$$\begin{vmatrix}I_r&0\\0&0\end{vmatrix}$$

Esercizio 8. Lo stesso dell'esercizio precedente per le due matrici

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -7 & 10 & -1 \\ -2 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

In ciascuno dei due casi si esegua, poi, la verifica.

Esercizio 9. Date le due matrici

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

si determini, usando il solito algoritmo

a) una matrice X, di tipo 4×3, tale che $AX = I_3$;

b) una matrice Y, di tipo 3×4, tale che $YB = I_3$;

c) si diano delle condizioni per A (risp.: per B) in modo che esista una matrice X come in a) (risp.: una matrice Y come in b)).

Esercizio 10. È possibile trasformare la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 8 & 11 \\ 4 & 9 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{nella} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

(ove le entrate segnate con un asterisco non ci interessano, mentre λ è un numero il cui significato vedremo in seguito) utilizzando solamente trasformazioni elementari sulle righe di tipo III?

Esercizio 11. Fissato un numero naturale $n \geq 3$, si calcoli il rango della matrice $n \times n$

$$A = (a_{ij}) \qquad \text{ove} \qquad a_{ij} = (i-1)n + j$$

Esercizio 12. Fissato un numero naturale $n \geq 2$, sia M lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ ad entrate in un fissato campo K. Se W_1 e W_2 sono i sottoinsiemi di M formati rispettivamente da tutte le matrici di rango $< n$ e ≤ 1, si determini se W_1 e W_2 sono sottospazi di M.