Esercizi Geometria 1, foglio 1 (ottobre 2017)

1. i) Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e siano u, v e w tre vettori linearmente indipendenti in V. Dimostrare che anche $u + v$, $v - w$ e $u + 2w$ sono linearmente indipendenti.

ii) Per quali $t \in \mathbb{R}$ i tre vettori $(1, 3, 4)$, $(3, t, 11)$ e (-1,-4,0) sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$?

iii) Dimostrare che due vettori (a, b) e (c, d) in K^2 sono linearmente indipendenti se e solo se $ad - bc \neq 0$.

iv) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}$ sul campo $\mathbb{Q}$, dimostrare che i vettori (numeri reali) 1 e $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti, e anche $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

2. Sia X un insieme, V un K-spazio vettoriale e $\mathrm{Appl}\,(X, V)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : X \to V$. Allora anche $\mathrm{Appl}\,(X, V)$ è uno spazio vettoriale, con la seguente somma e molteplicazione scalare:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$f, g \in \mathrm{Appl}\,(X, V)$, $\lambda \in K$. Considerando lo spazio vettoriale $\mathrm{Appl}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$, dimostrare che ognuna delle seguenti famiglie di funzioni è linearmente indipendente in $\mathrm{Appl}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$(\cos(x), \sin(x)); \qquad (e^x, e^{2x}); \qquad (\cos(x), \sin(x), e^x), \qquad (1, x, x^2, \dots, x^n).$$

3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e W un sottospazio di V. Si dice che due vettori v_1 e v_2 in V sono equivalenti modulo W, $v_1 \sim v_2$ se $v_1 - v_2 \in W$.

i) Dimostrare che questo definisce una relazione di equivalenza su V.

ii) Se $[v] = \{u \in V : u \sim v\}$ denota la classe di equivalenza di v, dimostrare che $[v] = v + W$, dove $v + V = \{v + w : w \in W\}$.

iii) Si denota con $V/W = \{[v] : v \in V\}$ l'insieme delle classi di equivalenza. Si definisce una somma e una molteplicazione scalare in V/W nel seguente modo:

$$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]; \quad \lambda[v] = [\lambda v].$$

Dimostrare che questa somma e molteplicazione scalare in V/W sono ben definite, ovvero non dipendono dalle scelte dei rappresentanti delle classi di equivalenza.

Osservazione. Con questa somma e molteplicazione scalare V/W diventa uno spazio vettoriale su K che si chiama lo spazio quoziente V mod W, oppure V su W.

4. i) Trovare gli elementi inversi, rispetto al prodotto, degli elementi $\bar{5}$ e $\bar{8}$ in $\mathbb{Z}_{13}$.

ii) Se $n \geq 2$ non è un numero primo, dimostrare che ci sono elementi non-banali (non zero) in $\mathbb{Z}_n$ che non hanno un inverso, rispetto al prodotto.

iii) Sia G un gruppo (in notazione molteplicativa); dimostare che $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.