U, V, T spazi vettoriali sul campo $\mathbb{R}$; n, m, l le dim. di U, V, T rispettivamente

$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ basi ordinate di U, V, T rispettivamente

$\underset{\mathcal{B}}{U} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{V} \xrightarrow{g} \underset{\mathcal{D}}{T}$ applicazioni lineari

$\underset{m \times n}{B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)}$ $\qquad \underset{l \times m}{A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(g)}$ $\qquad g \circ f : \underset{\mathcal{B}}{U} \longrightarrow \underset{\mathcal{D}}{T}$ è lineare

PBL: chi è la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f)$?

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "K_{\mathcal{C}}"] & T \arrow[d, "K_{\mathcal{D}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_B"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "L_A"'] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & f(u) \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & g(f(u)) \arrow[d] \\ \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \arrow[r, mapsto, "L_B"] & \underbrace{B \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}}_{m \times 1} \arrow[r, mapsto, "L_A"] & \underbrace{A\left(B \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}\right)} \end{tikzcd}$$

Per la proprietà associativa del prodotto R×C, basta qui spostare le parentesi

$$A\left(B \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}\right) = (AB) \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

la matrice AB è di tipo $l \times n$

$l \times \cancel{m} \quad \cancel{m} \times n$

$$\boxed{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f) = AB = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)} \qquad (1)$$

U, V, T, W spazi vettoriali $/\mathbb{R}$.

$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} T \xrightarrow{h} W$ applicazioni lineari.

La composizione di applicazioni (qualsiasi, cioè non serve che siano lineari!) è sempre <u>associativa</u>:

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad (2)$

Infatti, per ogni $u \in U$ si ha:

$$\begin{tikzcd} & g(f(u)) \arrow[r, "h"] & h[g(f(u))] \arrow[d, equal] \\ u \arrow[ur, "g\circ f"] \arrow[r, "f"'] & f(u) \arrow[r, "h\circ g"'] & h[g(f(u))] \end{tikzcd}$$

$\forall u \in U$

Siano date tre matrici qualsiasi A, B, C di tipo

$A \quad m\times n \qquad B \quad n\times p \qquad C \quad p\times q$

Quindi possiamo fare le seguenti molt. $R\times C$:

$AB \quad m\times p \qquad (AB)\cdot C \quad m\times q$

$BC \quad n\times q \qquad A(BC) \quad m\times q$

Alle tre matrici possiamo associare le appl. lineari

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{L_C} \mathbb{R}^p \xrightarrow{L_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^m$$

(qui è sottinteso che le basi nei quattro spazi vettoriali sono le rispettive basi canoniche).

$$(2) \Longrightarrow \quad L_A\circ(L_B\circ L_C) = (L_A\circ L_B)\circ L_C \xrightarrow{(1)} \underline{\underline{A(BC)=(AB)C}}$$

Quindi <u>il prodotto $R\times C$ di matrici gode della proprietà associativa</u>.

~ o ~

<u>ESERCIZIO</u> (Compito scritto del 27/6/17) (in parte)
Verificare che esiste un unico <u>endomorfismo</u> (è un'applicazione lineare $f: V\to V$, il dominio è uguale al codominio) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che

$$f\left(\underbrace{\begin{vmatrix}2\\-3\\7\end{vmatrix}}_{v_1}\right) = -2\begin{vmatrix}2\\-3\\7\end{vmatrix} \qquad \underbrace{\begin{vmatrix}7\\2\\-3\end{vmatrix}}_{v_2} \in \operatorname{Ker}(f) \qquad f:\underbrace{\begin{vmatrix}3\\-7\\2\end{vmatrix}}_{v_3} = \begin{vmatrix}-4\\6\\-14\end{vmatrix}$$

Il testo del problema dovrebbe far venire in mente a chi svolge l'esercizio il teorema di determinazione di un'applicazione lineare. Infatti, la seconda condizione è

$$f(v_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Per poter applicare tale teorema devo verificare che v_1, v_2, v_3 è una base di $\mathbb{R}^3$. Per questo è sufficiente verificare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Allora se $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sono degli scalari:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \underset{?}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 = x_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

$$x_1 \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{SLO}$$

Quel che devo far vedere è che questo SLO ha solamente la soluzione banale.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & -7 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + 2R_2}{\rightsquigarrow} \begin{vmatrix} \boxed{2} & 7 & 3 \\ -3 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 0 & 5 & 27 \\ 0 & 5 & -43 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 70 \\ 0 & 5 & -43 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix}$$

$70 x_3 = 0 \Rightarrow \underline{x_3 = 0}$ $\Big\} \Rightarrow 5x_2 = 0 \quad \underline{x_2 = 0}$

ed infine $\underline{x_1 = 0}$

v_1, v_2, v_3 sono, quindi, linearmente indipendenti.

$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ base ordinata

$A = M_{\mathcal{B}}(f) = ?$ $\qquad M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ nel caso di endomorf. si fa, di solito, così.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \end{array}$$

questo perchè

$$f(v_3) = \begin{vmatrix} -4 \\ 6 \\ -14 \end{vmatrix} = -2\, v_1$$

$f(v_1) - f(v_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f(v_1 - v_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \underline{v_1 - v_3 \in Ker(f)}$

$v_2 \,,\, v_1 - v_3 \in Ker(f)$

Questi due vettori sono linearmente indip. $\Rightarrow$
$dim(Ker(f)) \geq 2$. Può essere $\underline{dim(Ker(f)) > 2}$
$Ker(f) \subset \mathbb{R}^3$ sottospazio; se fosse, allora $Ker(f) = \mathbb{R}^3$
Ma in tal caso $f(v) = 0 \;\; \forall v \in \mathbb{R}^3$, e questo non accade. Quindi $dim(Ker(f)) = 2$ e, pertanto,
$\overset{u_2}{\overset{\shortparallel}{v_2}} \,,\, \overset{u_3}{\overset{\shortparallel}{v_1 - v_3}}$ è base di $Ker(f)$.

Voglio completarla ad una base di $\mathbb{R}^3$

$u_1 = v_1 \,,\, u_2 \,,\, u_3 \qquad -(u_3 - u_1) = v_3$

Quindi u_1, u_2, u_3 è un sist. di generatori per $\mathbb{R}^3$
dunque $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ è base ordinata di $\mathbb{R}^3$

Anche $\mathcal{D} = (f(v_1), e_2, e_3)$

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} f(v_1) \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ f(v_1) & 0 & 0 \end{array} & \end{array}$$

Abbiamo ottenuto una matrice semplice al prezzo di usare delle basi "adattate" ad f

Un modo importante di interpretare quanto fatto è

$$\underset{\mathcal{E}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[Q]{id_{\mathbb{R}^3}} \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[A]{f} \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[P]{id_{\mathbb{R}^3}} \underset{\mathcal{D}}{\mathbb{R}^3}$$

$\boxed{\text{Qui uso la (1)}}$

Cioè $Q = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$ $\qquad P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id_{\mathbb{R}^3})$

Come si trovano <u>effettivamente</u> tali matrici ?

$\mathcal{E} = (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_1 - v_3)$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underset{\underset{id(u_1)}{\parallel}}{u_1} & u_2 & u_3 \end{array} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \\ 0 & \frac{25}{2} & \\ 0 & \frac{43}{2} & \end{vmatrix} \begin{array}{l} f(v_1) = -2v_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underset{\underset{id_{\mathbb{R}^3}(v_1)}{\parallel}}{v_1} & v_2 & v_3 \end{array} \end{array}$$

$$v_2 = \begin{vmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} = p_{12} \cdot (-2) \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{vmatrix} + p_{22} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + p_{32} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -4\, p_{12} = 7 \\ +6\, p_{12} + p_{22} = 2 \\ -14\, p_{12} + p_{32} = -3 \end{cases}$$

$p_{12} = -\frac{7}{4}$

$p_{22} = 2 + \frac{\cancel{42}\,21}{\cancel{4}\,2} = \frac{25}{2}$

$p_{32} = -3 + \cancel{14}^{7} \frac{7}{\cancel{4}_2} = -3 + \frac{49}{2} = \frac{43}{2}$

<u>ESERCIZIO</u>

Trovare la terza colonna di P. Poi verificare che tutto funzioni.

Matrici come P e Q si chiamano <u>matrici DI CAMBIAMENTO DI BASE</u>. Uso P per spiegare il loro significato.

Sia $w \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi. Lo esprimo come comb. lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$

$w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$ ($b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ esistono e sono univocamente determinati)

Faccio il calcoletto $\underset{3\times 3}{P} \underset{3\times 1}{\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$ cioè d_1, d_2, d_3 sono gli scalari che devo usare per ottenere w (lo stesso di prima!) come

Allora $w = d_1 f(v_1) + d_2 e_2 + d_3 e_3$

combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{D}$.

SPIEGARE.

ESERCIZIO

Dire se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.

a) $f\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ $\quad f\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad f\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

b) ——— " ——— $\quad f\left(\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

c) ——— " ——— $\quad f\left(\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$

Nel caso una tale f esista, dire se è unica.

a) $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ sono linearmente indipendenti, dunque formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Allora f esiste ed è unica.

$w = \begin{vmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad w = x_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ Voglio trovare x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 = -4 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2 = 5+4 \\ x_1 = -4 \\ x_3 = 3+4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(w) = -4\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots$$

CAPIRE IL PERCHÉ

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Se esistesse una f lineare che soddisf. le condizioni richieste, allora

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

assurdo

Quindi f <u>non esiste</u>.

c) Per risolverlo devo completare $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$. Per esempio posso aggiungere e_3: v_1, v_2, e_3 sono lin. indipend.

$$f(v_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f(v_2) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(e_3) =$ quello che voglio in $\mathbb{R}^2$! SPIEGARE

Quindi <u>esistono</u> <u>infinite</u> applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che verificano le condizioni richieste.