Abbiamo visto che due spazi vettoriali isomorfi U, V
(cioè esiste $f: U \to V$ lineare e biiettiva) hanno
la stessa dimensione.

Viceversa, due spazi vettoriali che hanno la stessa
dimensione $\dim(U) = \dim(V)$ sono isomorfi. Infatti, se
$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono basi rispettivamente di U e V, allora

$U \xrightarrow{K_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^n \xleftarrow{K_{\mathcal{C}}} V$ $\quad K_{\mathcal{B}}, K_{\mathcal{C}}$ sono lineari e biiettive $\Rightarrow$

$f := (K_{\mathcal{C}})^{-1} \circ K_{\mathcal{B}} : U \to V$ è un isomorfismo.

Quindi la conoscenza della sola dimensione ci dice
praticamente tutto sullo spazio vettoriale

V s. vett su $\mathbb{R}$ $\quad \dim(V) = n \Rightarrow V \simeq \mathbb{R}^n$

V sp. vett. su $\mathbb{C}$ $\quad \dim(V) = n \Rightarrow V \simeq \mathbb{C}^n$ SPIEG.

~ o ~

$f: U \to V$ appl. lineare tra sp. vett. su $\mathbb{R}$.

Esiste qualche "conoscenza numerologica" che ci dia
un buon controllo su f ?

$U \xrightarrow{f} V$ $\qquad \dim(U) = n \qquad \dim(V) = m$

$\mathrm{Ker}(f) \subseteq U$, $\mathrm{Im}(f) \subseteq V$ sottospazi $\qquad \dim(\mathrm{Ker}(f)) = r \qquad \dim(\mathrm{Im}(f)) = s$

TEOREMA di DIMENSIONE PER APPLICAZIONI LINEARI

Si ha $n = r + s$, cioè (1) $\boxed{\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$

Dim.

Sia $u_1, \dots, u_r$ una base di $\mathrm{Ker}(f)$. La completo ad
una base di U : $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n$.

Ogni el.to di $\mathrm{Im}(f)$ è del tipo $f(v)$ con $v \in U$.

$w = \lambda_1 u_1 + \_\_ + \lambda_n u_n \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$ opportuni. Allora:

$$f(w) = f(\lambda_1 u_1 + \_\_ + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \_\_ + \lambda_n u_n) \overset{f \text{ lin}}{=}$$

$$= \underbrace{\lambda_1 \underbrace{f(u_1)}_{=0} + \_\_ + \lambda_r \underbrace{f(u_r)}_{=0}}_{=0} + \lambda_{r+1} f(u_{r+1}) + \_\_ + \lambda_n f(u_n)$$

$$= \lambda_{r+1} f(u_{r+1}) + \_\_ + \lambda_n f(u_n)$$

Dunque $f(u_{r+1}), \_, f(u_n)$ sono un <u>sistema di generatori</u> per $\mathrm{Im}(f)$

Per concludere la dimostrazione basta far vedere che tali vettori sono lin. indipendenti:

$$a_{r+1} f(u_{r+1}) + \_\_ + a_n f(u_n) = 0_V \overset{?}{\Longrightarrow} a_{r+1} = \_\_ = a_n = 0_{\mathbb{R}}$$

$$0_V \underset{f \text{ lineare}}{=} f(a_{r+1} u_{r+1} + \_\_ + a_n u_n) \Longrightarrow$$

$$a_{r+1} u_{r+1} + \_\_ + a_n u_n \in \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_{r+1} u_{r+1} + \_\_ + a_n u_n = b_1 u_1 + \_\_ + b_r u_r \Longrightarrow$$

$$b_1 u_1 + \_\_ + b_r u_r - a_{r+1} u_{r+1} - \_\_ - a_n u_n = 0_U$$

Ma $u_1, \_, u_n$ è base di U. Quindi

$$b_1 = \_\_ = b_r = a_{r+1} = \_\_ = a_n = 0 \quad \blacksquare$$

Nella dim. precedente abbiamo visto che $f(u_{r+1}), \_, f(u_n)$ sono elementi linearmente indipendenti di V.
Completo tale famiglia ad una base <u>di V</u>:

$$(\underbrace{f(u_{r+1}), \_\_, f(u_n)}_{n-r}, v_{n-r+1} \_\_, v_m) = \mathcal{C}$$

base ordinata di V

Considero la base ordinata di U:

$\mathcal{B}$ $(u_{r+1}, \dots, u_n, u_1, \dots, u_r)$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = ?$

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ f(u_{r+1}) \; \cdots \; f(u_n) \;\; f(u_1) \; \cdots \; f(u_r) \end{array} \begin{array}{l} f(u_{r+1}) \\ \vdots \\ f(u_n) \\ v_{n-r+1} \\ \vdots \\ v_m \end{array}$$

$$A = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} I_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]}_{n} \Big\} m$$

A è di tipo $m \times n$ (questo dipende solo dalle dimensioni di U, V; non dalle basi scelte)

A scritta "a blocchi"

Una conseguenza del Teorema di dimensione di un'applicazione lineare è il

COROLLARIO

Siano U, V spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, con dim(U) = dim(V) = n.
Se $f: U \longrightarrow V$ è lineare, allora sono equivalenti:

a) f è un isomorfismo

b) f è iniettiva

c) f è suriettiva

d) se $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono basi ordinate risp. di U e di V, allora $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ è una matrice $n \times n$ invertibile.

SPIEGA.

Dim. In generale si ha:

f iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\ker(f) = \{0\}$ $\Longleftrightarrow$ dim$(\ker(f)) = 0$

f suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = V$ $\Longleftrightarrow$ dim$(\mathrm{Im}(f))$ = dim(V)

Nel nostro caso

$$n = \dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$$\underset{0}{\shortparallel} \Longleftrightarrow \underset{n}{\shortparallel}$$

Questo mostra che a), b), c) sono equivalenti.

f sia un isomorfismo. Allora esiste $f^{-1}: V \to U$

$$\underset{\mathcal{B}}{U} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{V} \xrightarrow{f^{-1}} \underset{\mathcal{B}}{U} \qquad A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \qquad B = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$$

$$f^{-1} \circ f : U \to U \qquad f^{-1} \circ f = id_U \qquad BA = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \underset{I_n}{\underset{\shortparallel}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id)}}$$

Analogamente si prova che $AB = I_n$

Dunque A è invertibile: a) $\Rightarrow$ d)

Viceversa, sia A invertibile. Abbiamo le quattro applicazioni lineari

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle K_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_{\mathcal{C}}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[L_A]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$K_{\mathcal{C}} \circ f = L_A \circ K_{\mathcal{B}} \Rightarrow$$

$$K_{\mathcal{C}}^{-1} \circ (K_{\mathcal{C}} \circ f) = K_{\mathcal{C}}^{-1} \circ L_A \circ K_{\mathcal{B}}$$

$$(\qquad) \Rightarrow \quad f = K_{\mathcal{C}}^{-1} \circ L_A \circ K_{\mathcal{B}}$$

$K_{\mathcal{C}}^{-1}$ e $K_{\mathcal{B}}$ sono isomorfismi, dunque appl. lin. iniett.

Sia A invertibile. Allora

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \underline{0}\} \qquad AX = 0 / A^{-1} \cdot \_ \quad A^{-1}AX = A^{-1}0$$

$\Rightarrow X = 0$ cioè $\mathrm{Ker}(L_A) = \{0\} \Rightarrow L_A$ è iniettiva.

Quindi $f = K_{\mathcal{C}}^{-1} \circ L_A \circ K_{\mathcal{B}}$ è iniettiva. $\blacksquare$

ESERCIZIO

V sp. vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim(V) = n$

$p : V \to V$ lineare (p è un endomorfismo).

Supponiamo che $p^2 = p \circ p = p$ (un tale endomorfismo si dice un <u>proiettore</u>)

$\mathrm{Ker}(p)$ e $\mathrm{Im}(p)$ sono entrambi sottospazi di V

$v \in V$ arbitrario. Un vecchio trucchetto:

$$v = \underbrace{v - p(v)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{p(v)}_{\in \mathrm{Im}(p)} \qquad \forall v \in V$$

$$p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0_V \Rightarrow$$

Dunque $\boxed{V = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)}$ somma di sottospazi vettoriali.

Il Teorema di dimensione per un'applicazione lineare ci dice che

$$n = \dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p))$$

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p))$$ per quanto visto sopra.

Ma allora, la formula di Grassmann

$$\dim(\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)) + \dim(\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)) =$$

$$= \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p))$$

ci dice che $\dim(\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}}$

Verifichiamolo direttamente:

sia $v \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$ arbitrario. Allora $v = p(u)$ e

$0_V = p(v) = p(p(u)) = p(u) = v$ $\quad v = 0_V$, che conferma

Dunque $\boxed{V = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)}$

ESERCIZIO

07/10/17

Sia $f: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ data da $f\left(\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_1 - i z_3 \\ z_2 + 3i z_3 \end{bmatrix}$ $z_j \in \mathbb{C}$

Verificare che f è lineare e trovarne nucleo ed immagine.

$$\begin{bmatrix} z_1 - i z_3 \\ z_2 + 3i z_3 \end{bmatrix} = \overset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 3i \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

e_1, e_2, e_3 base canonica di $\mathbb{C}^3$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ base can. di $\mathbb{C}^2$

$f(e_1)$ $f(e_2)$

$\Longrightarrow$ f è lineare

Troviamo $f(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_1$

$\mathrm{Im}(f)$ contiene una base di $\mathbb{C}^2 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}^2 \Leftrightarrow$ f è suriettiva.

$$3 = \dim(\mathbb{C}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=2} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$$

Quindi, per trovare una base del nucleo mi basta trovare un suo elemento $\neq 0$.

$$0_{\mathbb{C}^2} = f\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_1 - i z_3 \\ z_2 + i z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} z_1 - i z_3 = 0 \\ z_2 + 3i z_3 = 0 \end{cases}$ SLO 2 eq., 3 inc.

La matrice dei coeff. è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 3i \end{bmatrix}$ z_3 è param. libero

pivots

$\begin{cases} z_1 = i z_3 \\ z_2 = -3i z_3 \end{cases}$ Una sol. è $\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i \\ -3i \\ 1 \end{vmatrix}$ questo vett. costituisce una base di $\mathrm{Ker}(f)$

ESERCIZIO

Studiare nucleo ed immagine di $L_A: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, dove

$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 1 \\ 2 & 2i & 0 \end{bmatrix}$ $L_A(e_2) = \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ i^2 \\ 2i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix} = i L_A(e_1)$

Questo ci dice, innanzitutto, che la matrice A ha al massimo 2 colonne lin. indip.: ~~[illegible]~~ $\begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ Poiché $Im(L_A)$ è generato dalle colonne di A, si ha

che $\dim(Im(L_A)) = 2$. Ma, allora, ~~ha~~ il Teorema di dimensione di un'appl. lin. ci dice che

$$\dim(Ker(L_A)) = \dim(\mathbb{C}^3) - \dim(Im(L_A)) = 3 - 2 = 1$$

Inoltre, abbiamo visto che

$$L_A(e_2) = i L_A(e_1) = L_A(i e_1) \Rightarrow L_A(e_2) - L_A(i e_1) = 0_{\mathbb{C}^3}$$

$$L_A(e_2 - i e_1) = 0_{\mathbb{C}^3} \Rightarrow e_2 - i e_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \in Ker(L_A)$$

SPIEGARE

$\left\{ \begin{vmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$ è una base di $Ker(L_A)$.