RANGO DI UNA MATRICE

A matrice $m \times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$

- $R_1, \ldots, R_m$ le righe di A; sono elementi di $\mathbb{R}^n$, quindi generano un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$

(RHO) $\rho_r(A) \overset{\text{def.}}{=} \dim(U)$ è detto <u>rango per righe</u> di A $\rho_r(A) \leq n$
è il massimo numero di righe di A lin. indipendenti

- $C_1, \ldots, C_n$ siano le colonne di A; sono elementi di $\mathbb{R}^m$
Sia $V \subset \mathbb{R}^m$ il sottospazio vettoriale da esse generato.
$\rho_c(A) \overset{\text{def}}{=} \dim(V)$ è detto <u>rango per colonne</u> di A, è il massimo numero di colonne di A lin. indipendenti

TEOREMA

Per una qualsiasi matrice A, di tipo $m \times n$, si ha che $\rho_r(A) = \rho_c(A)$ e tale numero è detto <u>rango</u> di A: $\rho(A)$. Banalmente si ha $\rho(A) \leq \min(m, n)$.

<u>Dim.</u> Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. La matrice rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$, la matrice che la rappresenta è proprio A. Abbiamo visto che $\operatorname{Im}(L_A)$ è generata in $\mathbb{R}^m$ dalle colonne di A, perché queste ~~che~~ sono rispettivamente $L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)$. Dunque

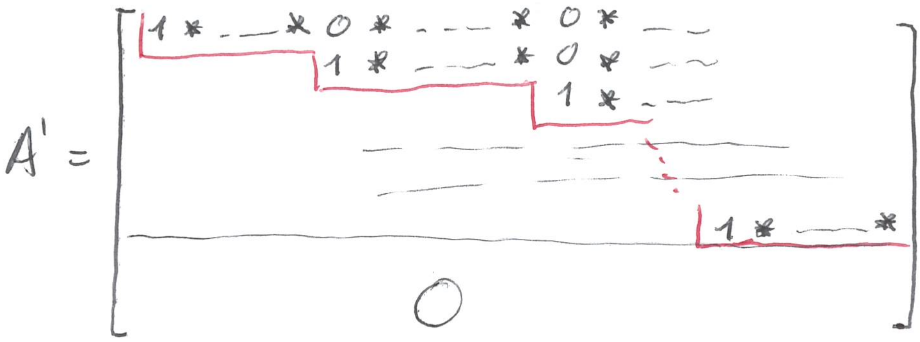
$$\rho_c(A) = \dim(\operatorname{Im}(L_A)) = n - \dim(\operatorname{Ker}(L_A)) \qquad (1)$$

per il Teorema di dimensione di un'applicazione lineare.

Ora
$$\operatorname{Ker}(L_A) = \left\{ \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{vmatrix} = O_{\mathbb{R}^m} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{soluzioni del SLO} \\ AX = O_{\mathbb{R}^m} \end{matrix} \right\}$$

Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ il sottospazio vettoriale di tutte le soluzioni del SLO $\underline{AX = 0.}$

Se risolviamo $\uparrow$ con l'algoritmo di eliminazione di Gauss trasformiamo questo SL in un SL equivalente $A'X=0$ dove A' è una matrice a gradini:



A' è ancora $m \times n$

A' è ottenuta da A mediante operazioni elementari sulle righe. Abbiamo visto a suo tempo che tali operazioni non cambiano il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^n$.

Dunque

$$\rho_r(A) = \rho_r(A') = \#\text{ pivots di } A'$$

Abbiamo anche visto che

$$\left(\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = \right)\ \dim(W) = \#\text{ dei parametri liberi di } A'X=0$$

Questi parametri liberi corrisp. alle indeterminate le cui colonne non contengono pivots. Riassumendo:

$$\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = \dim(W) = n - \#\text{ pivots di } A' = n - \rho_r(A') = n - \rho_r(A)$$

Allora da (1) segue

$$\rho_c(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = n - (n - \rho_r(A)) = \rho_r(A) \quad \blacksquare$$

ESERCIZIO

A matrice $m \times n$. Allora $rg(A) \leq 1 \iff A = BC$ (prodotto $R \times C$), dove B è di tipo $m \times 1$ e C è di tipo $1 \times n$

Inserire qui $\boxtimes$

$rg(A) = 0 \iff A = 0$ matrice $m \times n$ nulla. Allora prendo $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = [c_1 \dots c_n]$ qualsiasi $BC = 0 = A$.

$rg(A) = 1$ $\quad L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \dim(Im(L_A)) = rg(A) = 1$

Sia $v \in Im(L_A)$ $v \neq 0 \Rightarrow v$ è base di $Im(L_A) \simeq \mathbb{R}$

Poiché $Im(L_A) \subset \mathbb{R}^m$, si ha in realtà $v \in \mathbb{R}^m$

Come v si può prendere una qualsiasi colonna non nulla di A.

Considero la situazione:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "g = \text{``}L_A\text{''}"] \arrow[rr, bend left, "L_A"] & Im(L_A) \simeq \mathbb{R} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^m \\ \mathcal{B}_c & \mathcal{C} = \{v\} & \mathcal{B}'_c \end{tikzcd}$$

l'inclusione

$\mathcal{B}_c$, $\mathcal{B}'_c$ sono basi degli spazi vettoriali coinv.

Allora possiamo definire le matrici

$B = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'_c}(i)$ è di tipo $m \times 1$

$C = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{C}}(g)$ è di tipo $1 \times n$

Infine

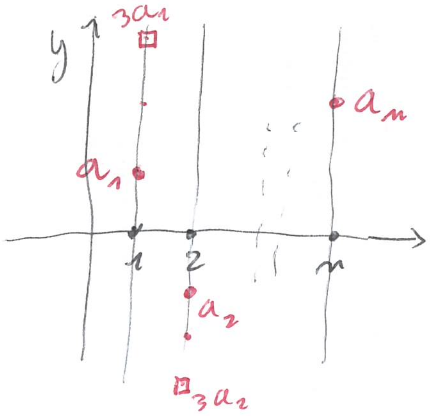
$$BC = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}'_c}(L_A) = A$$

$\boxtimes$ Se $A = BC$ con B, C come sopra. Allora L_A è la composizione di

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{L_C} \mathbb{R} \xrightarrow{L_B} \mathbb{R}^m$$

$\dim(Im(L_C)) \leq 1 \Rightarrow \dim(Im(L_A)) \leq 1$

Posso identificare $v = {}^t[a_1 \dots a_n] \in \mathbb{R}^n$ con un' applicazione $f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dove $f(i) = a_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. (Le successioni di numeri reali generalizzano questa situazione)



L' insieme dei "punti rossi" è il grafico di f

Quindi

$$\mathbb{R}^n = \{ f \mid f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ applicazione} \}$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, come interpreto $\lambda v = \lambda \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{vmatrix}$. Dunque

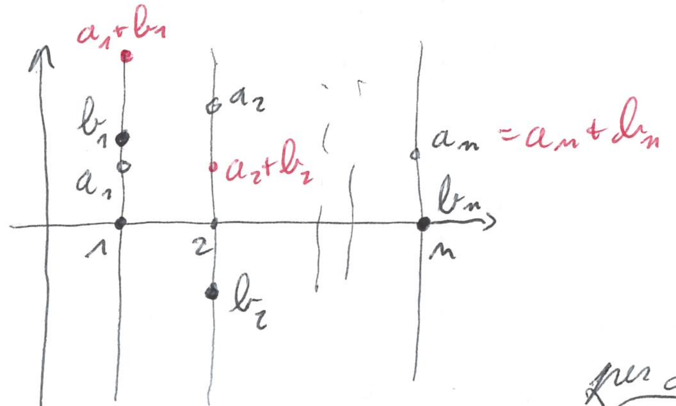
λv corrisponde all' applicazione $\{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$(1) \quad (\lambda v)(i) \overset{def}{=} \lambda \cdot v(i) \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

prodotto in $\mathbb{R}^n$

questo è il buon vecchio prodotto in $\mathbb{R}$.

Se $w = {}^t[b_1 \dots b_n] \in \mathbb{R}^n$, come interpreto in questo schema $v + w$?



cioè

questa è la addizione in $\mathbb{R}$

$$(2) \quad (v + w)(i) = v(i) + w(i) \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Quello che usiamo per definire le operazioni in $\mathbb{R}^n$ sono (ancora) le solite operazioni in $\mathbb{R}$.

Ma messe così le cose viene abbastanza naturale sostituire $\{1,\dots,n\}$ con un insieme qualsiasi E

Ad esempio $E =]a,b[\subset \mathbb{R}$. Consideriamo

$V \overset{def}{=} \{ f \mid f :]a,b[\longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ è un'applicazione $\}$
una funzione

è rimasto come prima.

Anche (1) e (2) *restano (quasi ...) come prima:

Presi comunque $f \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ DEFINIAMO

(1) $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in]a,b[$

prodotto in $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

Presi comunque $f, g \in V$ DEFINIAMO

(2) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in]a,b[$

addizione in $\mathbb{R}$ (nelle prime lezioni

$V \times V \longrightarrow V$ (son gli stessi ragionamenti fatti per $\mathbb{R}^n$)

Non è difficile verificare che queste operazioni in V verificano tutte le proprietà richieste per uno spazio vettoriale. Quindi V con le operaz. (2), (1) è uno spazio vettoriale.

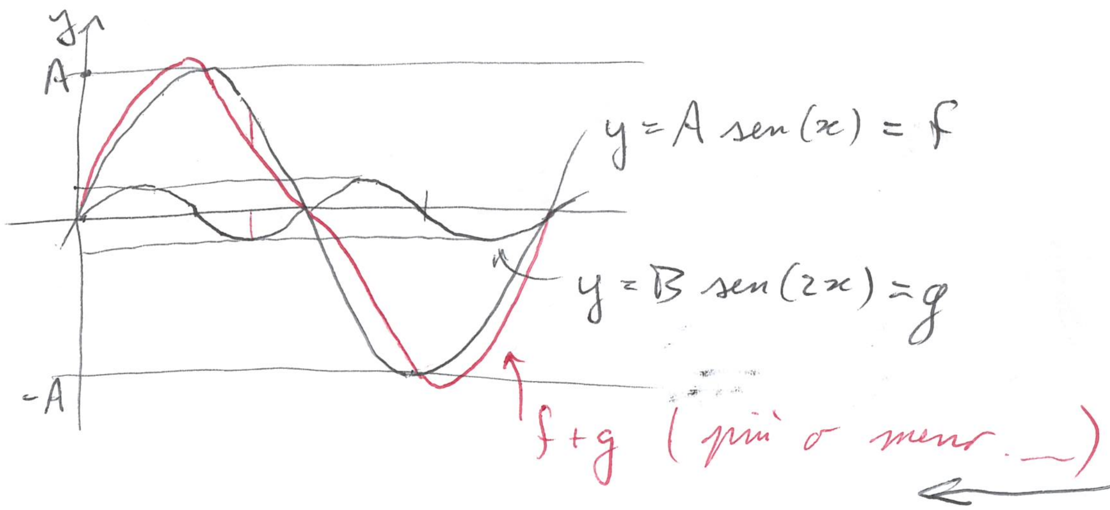
Una variante

$U = \{ f \mid f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua $\}$

Anche in questo caso U è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$

Per esserne sicuri l'unica cosa che resta da fare è verificare che presi comunque $f,g \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora le applicazioni $f+g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ e $\lambda f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ definite rispettivamente da (2) e (1) sono ancora continue. Questo si fa in Analisi.

Un'applicazione: analisi dei suoni



Ci sono molte altre varianti

Osserviamo che di $\mathbb{R}$ in $f :]a,b[\longrightarrow \underline{\mathbb{R}}$, o meglio $f : E \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ abbiamo usato solo le operazioni. Ma tutto funziona ancora se sostituiamo $\mathbb{R}$ con un qualsiasi spazio vettoriale fissato T, sul campo dei reali. Cioè

$$V \overset{def}{=} \{ f \mid f : E \longrightarrow T \text{ applicazione} \}$$

$f,g \in V$ $\qquad (f+g)(e) \overset{def}{=} f(e)+g(e) \quad \forall e \in E$

è l'addizione in $\underline{T}$

$$V \times V \longrightarrow V$$

Analogamente per il prodotto di un qualsiasi $f \in V$ per un $\lambda \in \mathbb{R}$: devo solo saper fare $\lambda \cdot f(e)$ è in T

Variante: come "E" prendiamo un altro spazio vettoriale fissato, sia W. Allora

$V = \{ f \mid f : W \longrightarrow T \text{ è applicazione} \}$

V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Per definire le operazioni in V si usano solo nelle (2), (1 le corrispondenti operazioni in T

A cosa serve, allora, che W sia uno spazio vettoriale?

È molto utile considerare un sottoinsieme di V qui sopra:

$V' \overset{def}{=} \{ f \mid f : W \longrightarrow T \text{ è un'applicazione lineare} \} \subset V$

Siano $f, g \in V'$; allora so definire $f+g$ in V

$(f+g)(w) \overset{def}{=} f(w) + g(w)$ op. in T $W \xrightarrow{f+g} T$

op. in V

PBL "$f+g$" è applicazione lineare ?

$(f+g)(w+w') = f(w+w') + g(w+w') =$

f, g sono lineari!

$= f(w) + f(w') + g(w) + g(w') =$

$= f(w) + g(w) + f(w') + g(w') = (f+g)(w) + (f+g)(w')$

$\forall w, w' \in W \implies f+g$ preserva la somma.

EXE $(f+g)(\lambda w) = \lambda (f+g)(w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall w \in W$

Quindi $f+g$ è appl. lineare. Cioè

$f, g \in V' \Longrightarrow f+g \in V'$

EXE Verificare che V' è sottospazio vettoriale di V.

La notazione standard per V' è $Hom_{\mathbb{R}}(W, T)$

Dunque $Hom_{\mathbb{R}}(W, T)$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

~o~

Fisso $\mathcal{B}$ base ordinata di W e $\mathcal{C}$ base ord. di T.

$\dim(W) = n$, $\dim(T) = m$.

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sia lo spazio delle matrici $m \times n$, ad entrate reali. Allora

$\mu : Hom_{\mathbb{R}}(W, T) \longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R}) \qquad f \longmapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. SPIEG.

~o~

CASO PARTICOLARE

$W = T$; allora $Hom_{\mathbb{R}}(W, T) = End_{\mathbb{R}}(W)$ è l'ins. di tutti gli endomorfismi di W

$id_W \in End_{\mathbb{R}}(W) \qquad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot id_W \in End_{\mathbb{R}}(W)$

Se $f : W \longrightarrow W$ è endomorfismo, allora

$f - \lambda id_W \in End_{\mathbb{R}}(W)$. Se $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, allora

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda id_W) = A - \lambda I_n$