Esercizi Geometria 3A

16/10/2017

1) Si consideri la mappa

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}\right), & t > 0 \\ \left(t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0\right), & t < 0 \\ (0,0,0), & t = 0 \end{cases}$$

a) Provare che $\alpha(t)$ è una curva differenziabile.

b) Provare che $\alpha(t)$ è regolare per ogni t e che la curvatura $k(t) \neq 0$, per $t \neq 0, t \neq \sqrt{\frac{2}{3}}, t \neq -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Verificare che $k(0) = 0$.

c) Mostrare che il limite dei piani osculatori per $t \to 0^+$ è il piano $y = 0$ ma il limite dei piani osculatori per $t \to 0^-$ è il piano $z = 0$ (questo implica che il vettore normale è necessariamente discontinuo in $t = 0$).

2) Calcolare la curvatura delle seguenti curve:

a) $\gamma(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}})$.

b) $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t\,,\ 1 - \sin t\,, -\frac{3}{5}\cos t)$.

c) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$.

d) $\gamma(t) = (\cos^3 t\,,\ \sin^3 t)$.

3) Si dimostri che se una curva è biregolare in $\mathbb{R}^3$, le rette tangenti non possono passare tutte per un punto.

4) Stabilire se la curva $\gamma(t) = (\cos t\,, \sin t,\ t),\ t \in \mathbb{R}$ è regolare, e se è piana. Calcolare poi il triedro fondamentale in $\gamma(t)$. Trovare il piano osculatore alla curva in $\gamma(0)$.

5) Sia σ una curva regolare parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea, e si assuma la curva biregolare. Si dimostri che $k = |\tau|$ in tutti i t se e solo se esiste un vettore non nullo v tale che $T(t) \cdot v = B(t) \cdot v$, $\forall t$.

6) Sia $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva semplice chiusa di classe C^1. Supponiamo che $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\gamma'(0) = \gamma'(1)$ e che $\|\gamma'(s)\| = 1$ per ogni $s \in [0,1]$.

   a) Dimostrare che la funzione $(s_1, s_2) \mapsto \|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\|$ ha un punto di massimo in $[0,1] \times [0,1]$.

   b) Dimostrare che esistono $s_1, s_2 \in [0,1]$ con $\gamma(s_2) \neq \gamma(s_1)$, tali che valgono le eguaglianze $\gamma'(s_1) \cdot \big(\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big) = 0$ e $\gamma'(s_2) \cdot \big(\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big) = 0$.