Esercizi Geometria 3A

23/10/2017

1) Stabilire se la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \ t), \ t \in \mathbb{R}$ è regolare, e se è piana. Calcolare poi il triedro fondamentale in $\gamma(t)$. Trovare il piano osculatore alla curva in $\gamma(0)$, ed il cerchio osculatore sempre in $\gamma(0)$.

2) Calcolare la curvatura delle seguenti curve:
   a) $\gamma(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \ \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}})$.
   b) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$.
   c) $\gamma(t) = (\cos^3 t\,, \ \sin^3 t)$.

3) Si dimostri che, se tutti i piani osculatori a una curva in $\mathbb{R}^3$ passano per uno stesso punto, allora la curva è piana. Si assuma la curva biregolare.

4) Si consideri la curva parametrizzata $\gamma(t) = \left(t, \ \frac{1+t}{t}, -\frac{1}{t}\right), \ t > 0$.
   a) Esistono valori del parametro t per cui la curvatura è nulla?
   b) γ è una curva piana? In caso affermativo scrivere l'equazione del piano che la contiene.
   c) Determinare il triedro di Frenet nel punto corrispondente al valore $t = 1$ del parametro.

5) Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva α parametrizzata da $\alpha(t) = (t + \cos t\,, t - \cos t\,, \sqrt{2} \sin t\,)$.

Definizione: Sia $\gamma\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata in $\mathbb{R}^3$. Diremo che γ è **sferica** se

$$\exists P \in \mathbb{R}^3, r \geq 0 \ t.c. \ \|\gamma(t) - P\| = r, \forall t \in (a, b).$$

In altri termini γ è sferica se la sua traccia è totalmente contenuta in una sfera di centro P e raggio r.

6) Sia $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare differenziabile in $\mathbb{R}^3$ i cui piani normali passano tutti per un punto $P \in \mathbb{R}^3$ fissato. Dimostrare che γ giace su una superficie sferica.

   Con piano normale in $\gamma(t_0)$ si intende il piano passante per $\gamma(t_0)$ e generato da $N(t_0), B(t_0)$.

7) Sia γ una curva biregolare in $\mathbb{R}^3$. Si mostri che se γ è sferica allora k, τ, rispettivamente curvatura e torsione di γ, soddisfano l'equazione differenziale ordinaria

$$\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)' = \frac{\tau}{k}.$$

8) Sia γ una curva biregolare sferica in $\mathbb{R}^3$. Si mostri che, se γ ha curvatura costante, è una curva piana.

   Hint: Usare il risultato dell'esercizio precedente.