$v_1 = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\quad v_1, v_2$ è una base di $\mathbb{R}^2$

Infatti $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ e v_1, v_2 sono lin. indip. SPIEGARE

$w = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = a e_1 + b \cdot e_2$ generico vettore di $\mathbb{R}^2$

Siccome v_1, v_2 è base di $\mathbb{R}^2$, esistono e sono unici $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $w = \lambda v_1 + \mu v_2$

Cerco una formula per $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \overset{??}{\rightsquigarrow} \begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \end{vmatrix}$ spiegare

Conviene pensare a questa situazione

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{id} \mathbb{R}^2$ è un endomorfismo

$\forall \; w \longmapsto w$ (con $w \in \mathbb{R}^2$)

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{id} \mathbb{R}^2$ quella che sto cercando è la matrice

$\mathcal{B}_c \qquad \mathcal{C} = (v_1, v_2)$ base ordinata

$P = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{C}}(id)$ Infatti: $\underline{\begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \end{vmatrix} = P \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}}$ è quel che volevo!

FORMULA di CAMBIAMENTO di COORDINATE

Adesso il problema è determinare P.

Trucco:

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{id} \mathbb{R}^2$

$\underbrace{\mathcal{C} \qquad\qquad \mathcal{B}_c}$

ho cambiato l'ordine delle basi!

$$P^{-1} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_c}(id) = \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} id(v_1) = v_1 & id(v_2) = v_2 \end{array} & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left| I_2 \middle| \begin{matrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{matrix} \right|$$

$P = (P^{-1})^{-1}$ calcolo

$$\left| \begin{matrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & -10 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{matrix} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{10} & \cancel{\frac{4}{10}}\,\frac{2}{5} \end{matrix} \right|$$

Conviene completare l'esercizio con la prova.

"ESERCIZIO" 19/10/17

Sia $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da

$$f\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y-2z+4t \\ y-z+t \\ x+2y-z+3t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix}$$

dunque f è lineare

$f = L_A$

$Im(L_A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A. Per trovarne una base faccio operazioni elementari sulle colonne di A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 - C_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 - C_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 + C_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 + C_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \to -C_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi:

una base di $Im(L_A)$ è $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, $v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\qquad \dim(Im(L_A)) = 2$

$\dim(Ker(L_A)) = 4 - 2 = \underline{2}$ Voglio trovare una base di $Ker(L_A)$.

Per questo riguardo le operazioni elementari fatte sopra; una premessa:

$(e_1, \ldots, e_4)$ base canonica di $\mathbb{R}^4$; $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ b. can. di $\mathbb{R}^3$

$C_1 = C_4 - C_2$ cioè $f(e_1) = f(e_4) - f(e_2) \Rightarrow f(e_1) + f(e_2) - f(e_4) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Quindi $f(e_1 + e_2 - e_4) = 0_{\mathbb{R}^3}$ $\qquad e_1 + e_2 - e_4 = u_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \in Ker(L_A)$

$C_1 = C_2 + C_3 \Longleftrightarrow C_1 - C_2 - C_3 = 0 \qquad f(e_1) - f(e_2) - f(e_3) = f(e_1 - e_2 - e_3) = 0$

$$e_1 - e_2 - e_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \in \operatorname{Ker}(L_A)$$

$$u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

È chiaro che u_3, u_4 sono lin. indip. dunque costituiscono una base di $\operatorname{Ker}(L_A)$.

Voglio completare u_3, u_4 ad una base $(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ in modo che

$$f(u_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = v_1 \quad \text{e} \quad f(u_2) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = v_2$$

$\underline{u_1 = e_1}$ va bene.

$v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} =$ [redacted] $- \left(\begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right) = -\left(f(e_3) + f(e_1)\right) = -f(e_1 + e_3)$

$$v_2 = f(\underbrace{-e_1 - e_3}_{= u_2}) \qquad u_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Sia $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \varepsilon_1)$ $\quad \mathcal{C}$ è base ord. di $\mathbb{R}^3$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & f(u_4) \end{array} \end{array}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad 3 \times 4$$

matrice a blocchi

$$A = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}'_c}(f) \qquad \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^4} \xrightarrow[L_Q]{id_{\mathbb{R}^4}} \underset{\mathcal{B}_c}{\mathbb{R}^4} \xrightarrow{f = L_A} \underset{\mathcal{B}'_c}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[L_P]{id_{\mathbb{R}^3}} \underset{\mathcal{C}}{\mathbb{R}^3}$$

$$Q = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_c}(id_{\mathbb{R}^4}) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \end{array}$$

pronto!

19/10/17

ESERCIZIO

In $\mathbb{R}^4$ considero i sottospazi U, V generati rispettivamente da:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \end{array} \quad \text{e da: } \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Si calcoli $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U\cap V)$, $\dim(U+V)$ e si determini una base di $U\cap V$.

SPIEGARE

v_1, v_2 alg. indipendenti $\Longrightarrow$ $\underline{\dim(V)=2}$

$u_2+u_3=u_4$ Provo ad aumentare il numero degli zeri

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad u_2-u_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

sono lin. indipendenti

SPIEGARE

Dunque $\underline{\dim(U)=3}$

$U+V$ è generato dalle colonne della matrice

Faccio un' elim di Gauss sulle colonne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 \longrightarrow C_4 - C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le colonne di questa matrice sono la base canonica di $\mathbb{R}^4$, dunque $U+V=\mathbb{R}^4 \Longrightarrow \underline{\dim(U+V)=4}$

Un modo concettuale di vedere che $U+V=\mathbb{R}^4$ è questo $\quad U\subset\mathbb{R}^4 \quad \dim(U)=3$

19/10/17

$w \in U \cap V \iff x_1 u_1 + x_2(u_2 - u_1) + x_3 u_3 = x_4 v_1 + x_5 v_2$

per $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ opportuni.

$$x_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \underbrace{x_4 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}}$$

e trovo un SLO con matrice dei coeff.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & \text{SPIEG.} & \end{array} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \cancel{-1}\,0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \cancel{-1}\,0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$rg(A) = 4$ lo sapevamo già.

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

x_5 è parametro libero

$x_5 = 1 \implies x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 1$

e $\underline{x_4 = 2}$

Per costruire un vettore di $U \cap V$ ci bastano x_4 e x_5. Dunque

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \in U \cap V$$

ed è $\neq 0$ dunque è una base di $U \cap V$

ESERCIZIO

51

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & a_{2n} \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

A $n \times n$ dimostrare che $\underline{A^n = 0}$

le entrate di A siano in K.

Pensiamo che A rappresenti rispetto ad una base fissata di K^n (per esempio: la base canonica) $(v_1, \ldots, v_n)$ un endomorfismo $f: K^n \to K^n$. Il prodotto righe per colonne iterato $A^n = \underbrace{AA \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ volte}}$ rappresenta l'endom. comp.

$$\underbrace{K^n \xrightarrow{f} K^n \xrightarrow{f} K^n \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} K^n \xrightarrow{f} K^n}_{n \text{ volte.}}$$

A mi dice che $\underline{f(v_1) = 0}$ $f(v_2) = a_{12} v_1$ Dunque

$f^2(v_2) = f(f(v_2)) = f(a_{12} v_1) = a_{12} f(v_1) = a_{12} 0 = 0$ $\underline{f^2(v_2) = 0}$

(è appena il caso di dirlo: $\underline{f^2(v_1) = 0}$)

A dice anche che $f(v_3) = a_{13} v_1 + a_{23} v_2$ Dunque:

$f^2(v_3) = a_{13} \underbrace{f(v_1)}_{=0} + a_{23} f(v_2) = a_{23} f(v_2) \Rightarrow f^3(v_3) = a_{23} \underbrace{f^2(v_2)}_{=0} = 0$

$\left(\underline{f^3(v_1) = 0} \quad \underline{f^3(v_2) = 0} \right)$ $\underline{f^3(v_3) = 0}$

Dunque si capisce abbastanza chiaramente quello che succede. Il problema è scriverlo formalmente.