ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 3

Trieste, 23 ottobre 2017

1. (i) Il prodotto cartesiano $V \times W$ di due K-spazi vettoriali è un K-spazio vettoriale, con le seguenti operazioni:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Dimostrare che, se $v_1, \dots, v_n$ formano una base di V e $w_1, \dots, w_m$ una base di W, allora $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)$ è una base di $V \times W$.

(ii) Sia $U = V \oplus W$ la somma diretta dei sottospazi V, W di U. Siano $v_1, \dots, v_n$ una base di V e $w_1, \dots, w_m$ una base di W. Dimostrare che $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ è una base di U.

2. Sia $w_1, \dots, w_m$ una base del sottospazio W di V, e sia $w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ un suo prolungamento a una base di V. Dimostrare che $[v_{m+1}], \dots, [v_n]$ costituiscono una base dello spazio quoziente V/W. (vedere foglio 2, esercizio 3)

3. La trasposta di una matrice quadrata $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ è la matrice ${}^tA = (a_{ji})_{i,j=1,\dots,n}$, ottenuta scambiando fra loro le righe e le colonne di A. Una matrice quadrata $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ è detta simmetrica se A coincide con la sua trasposta ${}^tA$, e antisimmetrica se $A = -{}^tA$.

(i) Dimostrare che le matrici simmetriche formano un sottospazio $Sym(n \times n, \mathbb{R})$ di $M(n \times n, \mathbb{R})$; trovare una base e la dimensione di questo sottospazio.

(ii) La stessa cosa per le matrici antisimmetriche $Alt(n \times n, \mathbb{R})$.

(iii) Dimostrare che $M(n \times n, \mathbb{R}) = Sym(n \times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n \times n, \mathbb{R})$.

4. Dire, motivando la risposta, se in $\mathbb{R}^3$ il vettore w è o meno combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 nei seguenti casi:

(i) $w = (6, 2, 1), v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (7, 3, 1), v_3 = (2, 5, 8)$;

(ii)$w = (2, 1, 1), v_1 = (1, 5, 1), v_2 = (0, 9, 1), v_3 = (3, -3, 1)$.