

Lemma dello scambio (Grammann, Steinitz)

Sia $(v_1, \dots, v_n) \stackrel{B}{=}$ una base di V .

Sia $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, con $\lambda_k \neq 0$ per un certo k , $1 \leq k \leq n$. Allora anche

$v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n$ è una base di V .
↓
sostituisco v_k con w

Dim.

Riordinando, poniamo supporre che $k=1$, allora $\lambda_1 \neq 0$.

Devo dimostrare due cose:

1) w, v_2, \dots, v_n generano V

2) sono linearmente indipendenti.

1) Sia $v \in V$: poiché B è una base, si ha

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n.$$

$$\begin{aligned} \text{Ma } w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n &\Rightarrow v_1 = \lambda_1^{-1} w - \lambda_1^{-1} \lambda_2 v_2 - \dots = \\ &= \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } v &= \mu_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \right) + \mu_2 v_2 + \dots = \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w - \frac{\mu_1 \lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n \mu_1}{\lambda_1} v_n + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + \left(\mu_2 - \frac{\mu_1 \lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \dots + \left(\mu_n - \frac{\lambda_n \mu_1}{\lambda_1} \right) v_n. \end{aligned}$$

2) Considero una comb. lin. nulla di:

w, v_2, \dots, v_n

$$\mu_1 w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n = 0; \text{ sostituisco } w:$$

$$\mu_1 (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n = 0$$

$$\mu_1 \lambda_1 v_1 + (\mu_2 + \mu_1 \lambda_2) v_2 + \dots = 0$$

Ma v_1, \dots, v_n sono l.i. u.d.i.p.,
 dunque i coeff. sono tutti nulli:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \lambda_1 = 0 \\ \mu_2 + \mu_1 \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \mu_n + \mu_1 \lambda_n = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \text{ perché } \lambda_1 \neq 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \vdots \\ \mu_n = 0. \end{array}$$

Teorema Prolungamenti o complementi
 di una base.

Sia $(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{B}$ una base di V , siano w_1, \dots, w_r
 vettori linearmente indipendenti.

Allora \downarrow

1) $r \leq n$; \leftarrow

2) esistono $n - r$ elementi di \mathcal{B}

$v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}}$ tali che

$w_1, \dots, w_r, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}}$ sia una base di V .

Dim. Per induzione su r .

$\boxed{r=0}$ vero banalmente

Supp. per $r-1$ vettori l.i. u.d.i.p. e dui. che
 vale per r :

Abbiamo w_1, \dots, w_r l.i. u.d.i.p., allora lo
 sono anche w_1, \dots, w_{r-1} (sottofam. di
 famiglia l.i. u.d.i.p.). Per ip. induttiva $\frac{r-1 \leq n}{\text{nono}}$
 trovare in \mathcal{B} $n - r + 1$ elem. in modo che
 $(w_1, \dots, w_{r-1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}})$ sia una base di V

(ho ri numerato). Si ha

$r \leq m+1$: ① se $r = m+1$, allora $r-1 = m$,
 $m-r+1 = 0$, quindi già w_1, \dots, w_{r-1} è
una base di V , e $w_r \in \langle w_1, \dots, w_{r-1} \rangle$:
annullo perché per ip. w_1, \dots, w_r sono l.u. indep.

② quindi $r \leq m$. Inoltre $m-r+1 \geq 1$.

$w_1, \dots, w_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_m$ è una base di V ;
oss. che $w_r \neq 0$ (altrimenti w_1, \dots, w_r l.u. dip.)

$$w_r = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{r-1} w_{r-1} + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_m v_m$$

$m-r+1 \geq 1$

$\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_m$ non sono tutti nulli, come sopra;
supp. che sia $\lambda_r \neq 0$, per il lemma dello
scalari si può sostituire a w_r w_r ,
e allora $(w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_m)$ è base di V .

Conseguenze.

1) Se V ha una base finita, ogni base è finita
Dim. $B = (v_1, \dots, v_m)$ base finita, $\{w_i, i \in I\}$
altra base: se I è infinito, prendo $m+1$
vettori $w_{i_1}, \dots, w_{i_{m+1}}$ sono l.u. indep., ma
~~non completano a una per il Teor. preced.~~ $m+1 \leq m$.
annullo

2) Se ho 2 basi finite di V , hanno lo stesso
numero di elementi.

Dim. v_1, \dots, v_m basi base
 w_1, \dots, w_m vettori l.u. indep. $\left. \begin{array}{l} \text{base} \\ \text{vettori l.u. indep.} \end{array} \right\} m \leq m$

poi invertendo i ruoli $\Rightarrow m \leq m$.

Def. V K -sp. vettoriale

dimensione di V $\dim V$ o $\dim_K V$

$e \begin{cases} \infty & \text{se } V \text{ non ha basi finite} \\ n & \text{se } V \text{ ha una base di } n \text{ elementi.} \end{cases}$

Es. $\dim_K K^n = n$, e_1, \dots, e_n base canonica

$\dim M(n \times m, K) = nm$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$\dim_K K[t] = \infty$

ESTRARRE UNA BASE.

Esercizio v_1, \dots, v_m sistema di generatori di V

$\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ contiene una base di V

Indice $\leq m$.

(se sono lin. indip. è già una base; altrimenti uno dipende dagli altri e toglie - - -)

Prop. V sp. vett. di dimensione finita n

(i) se v_1, \dots, v_m sono lin. indip. formano una base

(ii) se v_1, \dots, v_m generano V , sono una base.

Dim.

(i) v_1, \dots, v_m si può prolungare a una base di n elem. - - -

(ii) se v_1, \dots, v_m possono estrarne una base, nec. di n elementi $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ è base.

Confrontiamo ora la dim di V con quella di un suo sottospazio W :

Se $\dim V = n$ finita, anche W ha dim finita e $\dim W \leq \dim V$. Se $\dim W = \dim V$, allora $W = V$.

Dim.

Se W non fosse fin. generata, avrei una fam. infinita lin. indep. di elem. di W , dunque di V : assurdo. Dunque $\dim W$ è finita. Se ho una base di W , sono elem. lin. indep. in V , perciò $\dim W \leq \dim V$.

Se $\dim W = \dim V = n$ e w_1, \dots, w_n è base di W , sono tutti lin. indep. \Rightarrow è base anche di V e perciò $W = V$.

Om. se $W = \{0\}$, $\dim W = 0$.

Si dim. usando l'assioma della scelta (o lemma di Zorn) che ogni spazio vettoriale ha una base. (SENZA DIM.)

SOMMA DI SOTTO SPAZI

$U, W \subseteq V$ sottospazi

Def. $U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$.

sottospazio somma

(i) $U+W$ è un sottospazio

(ii) è il sottospazio generato da $U \cup W$:

$U+W \supseteq U, W$ e se $V' \supseteq U \cup W$, chiamam.

V' ~~contiene~~ è chiuso rispetto alla somma, dunque contiene $U+W$.

Teorema relazione di Grassmann,
 V spazio vettoriale di dimensione finita.

$W, W' \subseteq V$ sottospazi

Allora vale la relazione:

$$\dim W + \dim W' = \dim(W+W') + \dim(W \cap W').$$

Dim. Fissiamo una base di $W \cap W'$:

$$w_1, \dots, w_r, \quad r = \dim(W \cap W').$$

Prolungo a una base di W e a una base di W' :

$w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_k$ base di W

$w_1, \dots, w_r, w'_1, \dots, w'_n$ base di W'

Allora basta dim. che

$w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_n$ formano una base di $W+W'$.

a) generano $W+W'$.

Se $w+w'$ è un elemento di $W+W'$, allora

$$w \text{ si può scrivere } w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r + \lambda_{r+1} w_{r+1} + \dots + \lambda_{r+k} w_k$$

$$\text{e } w' = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_r w_r + \mu_{r+1} w'_1 + \dots + \mu_{r+n} w'_n;$$

$$\text{dunque } w+w' = (\lambda_1 + \mu_1) w_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_r) w_r + \lambda_{r+1} w_{r+1} + \dots + \mu_{r+n} w'_n.$$

b) sono l.l.v. indip.

$$\text{Se } \underbrace{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 w_{r+1} + \dots + \beta_k w_k}_{v \in W} + \underbrace{\gamma_1 w'_1 + \dots + \gamma_n w'_n}_{v' \in W'} = 0$$

$$\text{me } v = -\gamma_1 w'_1 - \dots - \gamma_n w'_n \in W' \Rightarrow$$

$v \in W \cap W'$, dunque v si può scrivere come
 $v = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_r v_r$.

Dunque

$$v = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_r v_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k$$

ho 2 espressioni di v come comb. lin. dei
vettori lin. indip. $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_k \Rightarrow$

$$\delta_1 = \alpha_1, \dots, \delta_r = \alpha_r, \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$$

Ora si ottiene:

$$\delta_1 v_1 + \dots + \delta_r v_r + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k = 0$$

ma $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_k$ sono lin. indip.,

$$\Rightarrow \delta_1 = \dots = \delta_r = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0.$$

Esempi: Casi possibili per:

- 2 piani in \mathbb{R}^3
- " " in \mathbb{R}^4

Def. Somma diretta.

La somma $W + W'$ è diretta se

$W \cap W' = \{0\}$; in tal caso
dim $W + W' = \dim W + \dim W'$.

Si scrive $W \oplus W'$.

V è somma diretta di 2 suoi sottospazi

W, W' se $V = W + W'$ e

$$W \cap W' = \{0\}.$$

Allora ogni vettore v di V si scrive in
maniera unica come $v = w + w'$,
con $w \in W$ e $w' \in W'$.

In particolare: $w + w' = 0 \Rightarrow w = 0$ e $w' = 0$.

In fatti se $v = w + w' = u + u'$ con $w, u \in W$
 $w', u' \in W'$

allora $\underbrace{w - u}_{\in W} = \underbrace{u' - w'}_{\in W'} \Rightarrow \in W \cap W'$

e perció è nullo e si ha $w - u = 0$
 $u' - w' = 0$. ■

Viceversa, supp. che ogni vettore di V abbia
1! espressione come somma $w + w'$.

Allora $V = W + W'$.

Inoltre $W \cap W' = \{0\}$; infatti se ci fosse
un vettore $u \neq 0$ t.c. $u \in W \cap W'$, allora
 $u = u + 0 = 0 + u$ ha 2 espressioni.

Oppure $0 = 0 + 0 = u - u$. ■

Dunque $V = W \oplus W'$.

Oss. Se $V = W \oplus W'$, unendo basi di W e W' si ottiene una base di V .

Poss. parlare di somma di una famiglia
di sottospazi $\{W_i\}_{i \in I}$ con $I = \{1, \dots, k\}$

$\sum W_i = \langle \bigcup_{i \in I} W_i \rangle$: sono le somme

~~di elem.~~ di elem. presi nei vari W_i .

Def. Si ~~def.~~ $V = \bigoplus W_i$ somma diretta se

1) $V = \sum_{i \in I} W_i$, e

2) ogni vettore di V ha 1! espressione
come somma di elem. $w_1 \in W_{i_1}, \dots, w_k \in W_{i_k}$

La 2) equivale a $W_i \cap \left(\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} W_j \right) = \{0\}, \forall i \in I.$

Per riduzione su k .

Esempio se v_1, \dots, v_n è una base di V ,

allora $V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle.$

Esempio $W \oplus W' = \mathbb{R}^3$

MATRICI

$$A \quad m \times n \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Righe di A : $(a_{11} \dots a_{1n}) = a_1$
 \vdots
 $(a_{m1} \dots a_{mn}) = a_m$ sono matrici $1 \times n$,
elementi di k^n

$$\text{Colonne di } A \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a^1, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = a^n$$

sono matrici $m \times 1$: elementi di k^m

A è quadrata se $m = n$.

Def. spazio delle righe di A è il sottospazio di k^n generato dalle righe di A $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$. La sua dimensione è detta rank per righe, ed è $\leq m$.

Spazio delle colonne di A è il sottospazio di k^m generato dalle colonne di A : $\langle a^1, \dots, a^n \rangle$. La sua dim è detta rank per colonne, ed è $\leq n$.

Vale il Teorema Data una matrice A :
 Il rango per righe coincide con il rango per colonne.

Dim. più avanti.

Esempi ① Matrice identica

$$A \underset{m}{I} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^m$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rango per righe e per colonne è 2

$$\textcircled{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{rg} \text{ è } 2$$

SISTEMI LINEARI

$A = (a_{ij})$ matrice $m \times n$ a entrate in K

$b_1, \dots, b_m \in K$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con x_1, \dots, x_n incognite è un sistema lineare di m equazioni in n incognite

A è la matrice del sistema

$(A|b)$ è la matrice completa, dove $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Una soluzione di $(*)$ è un vettore $v \in K^n$,

$$v = (v_1, \dots, v_n) \text{ t.c. } \begin{cases} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n = b_1 \\ \vdots \end{cases}$$

Se $b_1 = \dots = b_m = 0$ sistema omogeneo

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn} = 0 \end{cases} \quad \text{è il sistema omogeneo associato al sistema } (*).$$

Un sistema omogeneo ha sempre la soluzione nulla $(0, \dots, 0)$

Se un sistema lineare ha almeno una soluzione si dice compatibile. Un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile.

Un sistema lin. non omogeneo può essere o no compatibile; se lo è può avere una o più soluzioni.

$$n=m=1 \quad ax = b$$

$$\text{Se } a \neq 0 \quad x = \frac{b}{a} \quad 1! \text{ soluzione}$$

$$\text{Se } a=0, b \neq 0 \quad \text{non compatibile.}$$

$$\text{Se } a=b=0, \text{ ogni } v \in K \text{ è soluzione.}$$

Il sistema lineare (*) si può scrivere anche nella forma

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$\text{ovvero } x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = b.$$

Quindi: il sistema è compatibile \Leftrightarrow il

Il vettore b è combinazione lineare dei vettori a_1, \dots, a^n , cioè se $b \in \langle a_1, \dots, a^n \rangle$: spazio delle colonne di A .

In tal caso una soluzione è data dai coefficienti di una comb. lin. di a_1, \dots, a^n uguale a b . Se a_1, \dots, a^n sono in più linearmente indipendenti, la soluzione è unica.

Es. Sistema omogeneo: se le colonne di A sono lin. dipendenti, ci sono soluzioni non nulle.

Ogni colonna è un vettore di K^m ; le colonne sono n : se $n > m$ certamente il sistema ha soluzioni non banali.

Es. Caso $m = n$.

Ho tante equazioni quante incognite. Se le colonne sono lin. indip., costituiscono una base di K^m . Allora, qualunque sia (b) , il sistema ha 1! soluzione.

Primo metodo di risoluzione dei sistemi lineari: algoritmo di eliminazione di Gauss.

Si trasforma il sistema di partenza (*) in un sistema lineare equivalente, mediante trasformazioni elementari sulla