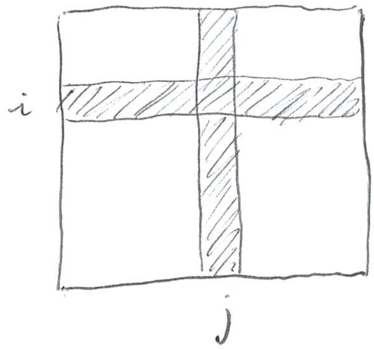
LEZIONE 22

RIASSUNTO DELLA LEZIONE DI IERI

- $n \geq 1$ intero fissato

M_n spazio vettoriale delle matrici $n \times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$

Se $A \in M_n$ e i, j sono fissati $1 \leq i, j \leq n$, allora



A_{ij} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna.

- $n = 2$ $\quad \det : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} ad - bc$

- Per $n \geq 2$ si def. una funzione $\det : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$ per induzione su n.

Per $\underline{n = 2}$ (anche per $n = 1$): fatto sopra.

PASSO INDUTTIVO

Se abbiamo $\det : M_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora per ogni $A \in M_n$ definiamo

(1) $$\boxed{\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(A_{n1})}$$

Otteniamo così una funzione $\det : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

- PROPRIETÀ di $\det : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$

(I) $\det(I_n) = 1$

(II) $\det$ è MULTILINEARE (n-lineare, per l'esattezza):

Penso ogni $A \in M_n$ strutturata in righe $A = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$

Fisso arbitr. i, indice di riga $1 \leq i \leq n$

Fisso arbitrariamente $n-1$ vettori $R_1, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots R_n$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ \square \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

è un'applicazione lineare

SPIEGARE

III det è ALTERNANTE : se $A \in M_n$ ha due qualsiasi righe uguali, allora $\det(A) = 0$.

Queste tre proprietà si dimostrano tutte per induzione su n. Sono le proprietà fondamentali di det. Una variante di III è

III' det è ANTISIMMETRICA : se A' è la matrice ottenuta da $A \in M_n$ scambiando tra di loro due qualsiasi righe di A, allora $\det(A') = -\det(A)$.

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI UNA MATRICE (QUADRATA). LORO EFFETTO SUL DETERMINANTE

a) SCAMBIO DI DUE RIGHE

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_h \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_h \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

(2) $\det(A') = -\det(A)$ per III'

b) MOLT. DI UNA RIGA, LA i-ESIMA, PER UNO SCALARE $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$:

$$A=\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}\qquad A'=\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ cR_i\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}\qquad (3)\ \ \underline{\det(A')=c\det(A)}\quad \text{per } \mathrm{II}$$

c) SOMMARE ALLA RIGA h-ESIMA LA RIGA i-ESIMA ($i \neq h$) MOLTIPLICATA PER $a \in \mathbb{R}$

$$A=\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ R_h\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}\qquad A'=\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ R_h+aR_i\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}$$

Allora

$$(4)\ \ \underline{\det(A')=\det(A)}$$

Infatti:

$$\det(A') \overset{\mathrm{II}}{=} \det\underbrace{\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ R_h\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}}_{=A} + \det\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ aR_i\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix} \overset{\mathrm{II}}{=} \det(A) + a\det\underbrace{\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}}_{=0 \text{ per } \mathrm{III}} \qquad (*)$$

I TRE TIPI DI MATRICI ELEMENTARI

- fissati $1 \le i < h \le n$

$$S_{ih} \overset{def}{=} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ h \\ \\ \\ \end{array}$$

è ottenuta scambiando le righe i-esima ed h-esima di I_n

$$(5)\ \ \det(S_{ih}) \overset{(2)}{=} -\det(I_n) \overset{\mathrm{I}}{=} \underline{\underline{-1}}$$

$$M=\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ R_h\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}\quad n\times \underset{\overset{=}{N.B.}}{q} \qquad (6)\ \ S_{ih}M=\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_h\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}$$

come si verifica facilmente

- fissati $1 \le i \le n$ e $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$

$$M_{ic} \overset{def}{=} \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

è ottenuta moltiplicando l'i-esima riga di I_n per lo scalare c.

$$(7) \quad \det(M_{ic}) \overset{\mathrm{II}}{=} c \det(I_n) \overset{\mathrm{I}}{=} c \cdot 1 = \underline{c} \neq 0$$

Se la matrice M di tipo $n \times q$ è come nel punto precedente, allora

$$(8) \quad M_{ic} M = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ cR_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

come si vede subito

- fissati $1 \le i, h \le n$ $\underline{i \neq h}$ e fissato $a \in \mathbb{R}$ (può anche essere $a = 0$)

$$E_{ih,a} \overset{def}{=} \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & a & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \\ i \\ \\ h \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

è ottenuta a partire da I_n, sommando all'i-esima riga, l'h-esima riga moltiplicata per a.

Può benissimo essere $h < i$.
Abbiamo visto prima, in (☆), che

$$(9) \quad \det(E_{ih,a}) = \det(I_n) \overset{\mathrm{I}}{=} \underline{1}$$

Infine, se la matrice M, di tipo $n \times p$, è come nei punti precedenti, allora (provando su esempi, oppure pensando...):

$$E_{ih,a} M = E_{ih,a} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_h \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + aR_h \\ \vdots \\ R_h \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

LEMMA Se $A \in M_n$ e se E è una qualsiasi matrice $n \times n$ elementare, allora

$$(11) \qquad \boxed{\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)}$$

Se $E_1, \ldots, E_k$ sono matrici elementari $n \times n$ (di qualsiasi tipo SPIEG.), allora:

$$(12) \qquad \det(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A) = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \cdot \det(A)$$

Dim.
Se E è di tipo S_{ih}, allora il risultato (11) segue da (5), (6) e III'

Se $E = M_{i,c}$ allora (11) segue da (7), (8) e II.

Se $E = E_{ih,a}$ allora (11) segue da (9), (10) e (★).

Quindi (11) è dimostrato

(11) $\Rightarrow$ (12) per esercizio (sugg.: induzione su k) ■

L' ELIMINAZIONE DI GAUSS CON LE MATRICI ELEMENTARI

M matrice $n \times p$ qualsiasi.

Possiamo interpretare l'algoritmo di eliminazione di Gauss sulle righe di M mediante prodotti a sinistra con opportune matrici elementari

ESEMPIO

Considero $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (è quadrata perchè mi sono stufato di scrivere colonne ...)

$$\underset{E_1}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{M}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{E_1 M}{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{E_2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{E_1 M}{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{E_2 E_1 M}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{E_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{E_2 E_1 M}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{E_3 E_2 E_1 M}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

E si può andare avanti fino a quando non si ottiene una matrice a gradini

$$M' = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 M$$

Suppongo adesso $M = A \in \mathcal{M}_n$ matrice quadrata

13) $\boxed{A' = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 A}$ A' a gradini.

Allora per una matrice quadrata $n \times n$ a scalini ci sono solo due possibilità:

$A' = I_n$ oppure

l'ultima riga di A' è tutta nulla

INSERIRE ☒ a pag. seguente.

L'osservazione essenziale della lezione di oggi è che tutti i risultati dei vari conticini fatti, da (2) (compreso) in poi, dipendono SOLO dalle proprietà I, II e III

Nel primo caso $\det(A') = 1$, nel secondo caso $\det(A') = 0$.
Poi abbiamo visto (5), (7), (9) che $\underline{\det(E_l) \neq 0}$ per ogni $l = 1, \dots, k$.
Da (12) segue, infine:

$$\boxed{\det(A) = \det(A') \cdot \frac{1}{\det(E_1)} \cdots \cdots \frac{1}{\det(E_k)}}$$

Quindi abbiamo la conclusione:

<u>TEOREMA</u>

Sia $\delta : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

(I) $\delta(I_n) = 1$

(II) δ è lineare rispetto a ciascuna riga di A
cioè δ è <u>multilineare</u>

(III) Se $A \in M_n$ ha due righe uguali, allora $\delta(A) = 0$.

Allora per ogni matrice $A \in M_n$ si ha che

$$\boxed{\delta(A) = \det(A)}$$

"<u>ESEMPIO</u>"

$$A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{---} & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & & \\ + & - & & & \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{n+1} & & & & \end{bmatrix}$$

Definisco

$$\delta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{-a_{12}\det(A_{12}) + a_{22}\det(A_{22}) - \ldots + (-1)^{n+1} a_{n2}\det(A_{n2})}_{}$$

<u>sviluppo di Laplace secondo gli elementi della 2^a colonna.</u>

Si può verificare che δ soddisfa (I), (II) e (III) (si fanno ragionamenti analoghi a quelli fatti nel caso di (1).). Quindi $\delta(A) = \det(A)$.

<u>ESEMPIO</u>

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 32 \end{bmatrix}\right) = -1 \cdot \det\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = -(50-72) = 22$$

oppure

$$\det\begin{bmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 32 \end{bmatrix} = 5 \cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 32 \end{bmatrix}}_{-50} - 8 \underbrace{\det\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 32 \end{bmatrix}}_{=72} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}}_{=0}$$

Si trovano sviluppi di Laplace per det secondo una qualsiasi colonna di A. Bisogna stare solo <u>attenti ai segni</u>.