Esercizi Geometria 3A

30/10/2017

1. Sia $\alpha(t) = \left(t, \frac{t^3}{3}, \frac{t^4}{4}\right)$. Si provi che è una curva semplice e regolare. Se ne calcoli la curvatura precisando se si annulla in qualche punto. Si calcoli anche la torsione τ (ove possibile), e si dica in quali punti è positiva.

2. Si consideri la retta r di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x = y = z$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione $F(x, y, z) = (\sin(e^x), e^z, \cos(e^y))$. Sia C l'immagine di r tramite F.
   a. Verificare che C è la traccia di una curva regolare $\alpha(t)$;
   b. Calcolarne l'ascissa curvilinea e scrivere una sua parametrizzazione naturale;
   c. Calcolare le sue funzioni curvatura e torsione;
   d. Dire di che curva si tratta.

3. Si consideri la curva ("clotoide") nel piano xy parametrizzata come segue:
$$c(t) = \left(\sqrt{\pi} \int_0^t cos\left(\frac{\pi\tau^2}{2}\right) d\tau, \sqrt{\pi} \int_0^t sin\left(\frac{\pi\tau^2}{2}\right) d\tau\right).$$
   Verificare che la curva è regolare, passa per l'origine, è simmetrica rispetto all'origine e ha ivi un flesso. Dimostrare che la sua curvatura in $P = c(t)$ coincide, a meno del segno, con la lunghezza del segmento di curva da P all'origine.

4. Si consideri la curva di $\mathbb{R}^3$ così definita:
$$\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$$
   a. Verificare che si tratta di una curva regolare priva di flessi;
   b. Calcolarne triedro fondamentale, curvatura e torsione e verificare che sono soddisfatte le formule di Frenet;
   c. Dimostrare che γ è una circonferenza, e trovare raggio, centro e il piano in cui è contenuta.

5. Sia $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata in ascissa curvilinea, con curvatura mai nulla. Sia $\sigma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva tale che $\sigma(s)$ ha per coordinate le componenti del versore tangente a α calcolato in $s \in I$. Provare che la traccia di σ è contenuta nella sfera unitaria. Calcolare la curvatura di σ in funzione di curvatura e torsione di α.

6. Sia $\beta(s)$ una curva regolare di $\mathbb{R}^3$ parametrizzata con il parametro lunghezza d'arco s, siano $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ le sue funzioni curvatura e torsione e $T(s), n(s), b(s)$ rispettivamente i suoi versori tangente, normale e binormale. Supponiamo inoltre $\tau(s) \neq 0$ per ogni s. Si consideri la curva $\alpha(s)$ definita da: $\alpha(s) = \int_0^s b(u)du$. Verificare che $\alpha(s)$ non ha flessi. Dimostrare che la sua funzione curvatura è $|\tau(s)|$ e la sua funzione torsione è $-\kappa(s)$. Calcolare infine il suo triedro di Frenet.

7. Si consideri la seguente curva di $\mathbb{R}^3$: $\alpha(t) = \left(2\sqrt{2}t - \sin t, 2\sqrt{2}\sin t + t, 3\cos t\right)$.
   a. Se ne calcoli la funzione lunghezza d'arco;
   b. Se ne calcoli l'apparato di Frenet, verificando in particolare che $\kappa = \tau = \frac{1}{6}$.
   c. Si consideri l'elica $h(t) = (\mathrm{a}\cos t, \mathrm{a}\sin t, bt)$. Verificare che esistono due coppie di costanti (a, b) tali che l'elica corrispondente sia isometrica alla curva $\alpha(t)$. Si tratta di isometrie dirette o inverse?