PRODOTTO FRA MATRICI

definiamo

$$M(m\times n, K) \times M(n\times k, K) \longrightarrow M(m\times k, K)$$

$$(A=(a_{ij}),\ B=(b_{jk})) \longrightarrow AB=C=(c_{ik})$$

dove

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

PRODOTTO RIGA PER COLONNA

Esempio 1

$$\underset{4\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix} = \underset{3\times 2}{AB}$$

$$c_{11} = 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = 0$$

uso 1ª riga di A e 1ª colonna di B

$$c_{12} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + -1\cdot 1 = 0$$

uso 1ª riga di A e 2ª colonna di B

.... e poi si continua

<u>Esempio 2</u> · A matrice $1\times n$, B matrice $n\times 1$ $\}\rightarrow$ $A\times B$ matrice 1×1 (uno scalare)

$$(a_1 \dots a_n)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_n\end{pmatrix} = (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)$$

· A matrice $n\times 1$, B matrice $1\times m$ $\}\longrightarrow$ $A\times B$ matrice $n\times m$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}\cdot(b_1 \dots b_m) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_m\end{pmatrix}$$

<u>Esempio 3</u> $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = E_3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ A}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = A\cdot E_3 = A$$

Ma è anche vero che $E_3\cdot A = A$

Generalizziamo
$$\underset{n\times n}{E_n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

$$E_n = (\delta_{ij}) \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

delta di Kronecker

Si ottiene facilmente che

$$A \cdot E_n = E_n A = A$$

(E_n elemento neutro)

Esempio 4: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = AB$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = BA$$

$$AB \neq BA$$

Oss Il prodotto fra matrici non è commutativo.

<u>Esempio 5</u> i sistemi possono essere scritti in forma "matriciale"

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{matrice } m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice } n\times 1 \\ \text{(delle incognite)}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice} \\ m\times 1}}$$

<u>Proposizione (proprietà prodotto riga per colonna)</u>

Siano A, B, A', B' con il numero opportuno di righe e colonne

1) ${}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA$

2) $A(B+B') = AB + AB'$ distributività (a sinistra e a destra)

$(A+A')\cdot B = AB + A'B$

3) $(AB)C = A(BC)$ associatività

4) $(\lambda A) \cdot B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

Dimostrazione

1) $A = (a_{ij})$ $\boxed{\text{matrice } m \times n}$

$B = (b_{jk})$ $\boxed{n \times r}$

$C = A \cdot B = (c_{ik})$ $\boxed{m \times r}$

con $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

$C' = {}^t(A \cdot B) = {}^t C = (c'_{ki})$ $\boxed{r \times m}$

con $c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

— o —

${}^t A = (a'_{ji})$ $\boxed{n \times m}$

$a'_{ji} = a_{ij}$

${}^t B = (b'_{kj})$ $\boxed{r \times n}$

$b'_{kj} = b_{jk}$

$$D = {}^tB\,{}^tA \qquad \boxed{r \times m}$$

se $D = (d_{ki})$ allora

$$d_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}\, a'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\, a_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

---

da cui $\quad c'_{ki} = d_{ki}$

cioè $\quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ $\quad \blacksquare$

APPLICAZIONI LINEARI

Def V, W spazi vettoriali su un campo K

Un'applicazione $f: V \longrightarrow W$ si dice lineare se valgono

i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

somma in V somma in W

(f è compatibile con la somma)

ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall \lambda \in K \; \forall v \in V$

prodotto in V prodotto in W

(f è compatibile con il prodotto per uno scalare)

Oss: f è lineare se e solo se

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \; \forall v_1, v_2 \in V$$

Oss: $f: V \longrightarrow W$ lineare allora $f(0) = 0$ e $f(-v) = -f(v)$

Dim: $\cdot$ $f(\underset{V}{0}) = f(\underset{K}{0} \cdot \underset{V}{0}) = \underset{K}{0}\, \underbrace{f(0)}_{\in W} = 0$

proprietà ii

$$f(-v) = f((-1)\cdot v) = (-1)f(v) = -f(v)$$

$\boxtimes$

<u>Oss</u> • se $f(0) \neq 0$ allora f non è lineare

• f appl. lineare è costante

$$f(v) = 0 \iff \forall v \in V$$

<u>Esempi:</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) $f(x) = a\,x$ è lineare

infatti

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) =$$

$$= \lambda_1 \underbrace{a\,x_1}_{\substack{\shortparallel \\ f(x_1)}} + \lambda_2 \underbrace{a\,x_2}_{\substack{\shortparallel \\ f(x_2)}} = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

2) $f(x) = 2x + 1$ non è lineare

$$f(0) \neq 0$$

3) $f(x) = x^2$ non è lineare

$$f(1+1) = 2^2 = 4$$
$$\neq$$
$$f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

4)
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$
è lineare (fare semplicemente il conto)

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

prodotto fra matrici

5)
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 1 \\ x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ non è lineare

6)
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 \\ x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

non è lineare

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \neq$$
$$2f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Def

Sia $A=(a_{ij})$ matrice $m \times n$ su K

Definiamo

$$L(A): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$L(A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

prodotto fra matrici

Prop $L(A)$ è un'applicazione lineare

Dim: $\lambda, \mu \in K$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$L(A)\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{definizione}}{=} A\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{distribut.}}{=} A\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) + A\left(\mu\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{proprietà 4) della prop}}{=} \lambda A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} + \mu A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{def.}}{=} \lambda L(A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu L(A)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$