Matematica per l'economia e la statistica 2

Appello del 06/06/2017

1. (a) (3 punti) Si determini il rango della seguente matrice in funzione del parametro reale λ:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Suggerimento: si sfrutti il teorema di Kronecker.

   (b) (2 punti) Posto $\lambda = 1$, si stabilisca se $\mathbf{w} = (6, 10, -4, 4)$ appartiene allo spazio riga di A.

   (c) (2 punti) Posto $\lambda = 1$, si prolunghi la base dello spazio riga di A ad una base di $\mathbb{R}^4$.

2. Data $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, sia $F\colon \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da
$$F(X) = \begin{pmatrix} x-y & 2x-2y \\ 2x-2y-z+t & 4x-4y-2z+2t \end{pmatrix}.$$

   (a) (2 punti) Si dimostri che F è lineare.

   (b) (3 punti) Si determinino il nucleo e l'immagine.

   (c) (2 punti) Si dia la rappresentazione matriciale associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e se ne calcoli il determinante e la traccia.

3. (a) (3 punti) Si dimostri che se $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ è antisimmetrica allora A^2 è simmetrica. In questo caso, cosa si puó dire circa la diagonalizzabilità di A^2?

   (b) (3 punti) Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, si verifichi che è antisimmetrica e non diagonalizzabile

   (c) (3 punti) Si determinino gli autovalori e i relativi autospazi di A^2.

   (d) (2 punti) Con riferimento alla matrice del punto precedente, si trovi una matrice ortogonale P tale che $P^t A^2 P$ sia diagonale.

4. (a) (3 punti) Si risolva la seguente equazione, ricorrendo alla forma trigonometrica:
$$\overline{z}^3 = (1+\sqrt{3}i)z^2.$$

   (b) (2 punti) Si dimostri che se A è diagonalizzabile allora A^t è diagonalizzabile.