Matematica per l'economia e la statistica 2
Appello del 13/02/2017

1. Dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (1, \lambda, -1, 3)$.
   (a) (2 punti) Si determini il complemento ortogonale dell'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
   (b) (3 punti) Si determini se esistono valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{w}$ sia una combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. In caso affermativo, si determini tale combinazione lineare.
   (c) (3 punti) Si determini per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}$ formano una base di $\mathbb{R}^4$.

2. Sia $F\colon \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ l'applicazione cosí definita:
$$F(p(t)) = p''(t).$$
   (a) (3 punti) Si dimostri che F è lineare.
   (b) (2 punti) Si trovino il nucleo e l'immagine di F.
   (c) (1 punto) L'applicazione è un isomorfismo? Si giustifichi la risposta.
   (d) (2 punti) Dati $\mathcal{B} = \{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ una base di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ e $p(t) = t^3 + 2t^2 - t + 3$, si diano la rappresentazione matriciale di F e il vettore coordinato di $p(t)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

3. (a) (3 punti) Sia V uno spazio vettoriale reale e $F \in \mathcal{L}(V)$. Si dimostri che se λ è un autovalore di F con autovettore $\mathbf{v}$ allora λ^n è un autovalore di F^n con autovettore $\mathbf{v}$ per ogni $n \geq 2$.
   Suggerimento: si operi per induzione su n.
   (b) (2 punti) Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, si determinino gli autovalori di A^3 e i relativi autospazi.
   (c) (1 punto) Si motivi perchè A^3 è diagonalizzabile.
   (d) (2 punti) Si trovi la matrice ortogonale P tale che $P^t A^3 P$ sia diagonale.
   (e) (1 punto) Si trovi la matrice diagonale D simile ad A^3.

4. (a) (2 punti) Si risolva la seguente equazione:
$$z^2 + iz - i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$
   (b) (3 punti) Siano V uno spazio vettoriale euclideo e $F\colon V \to V$ un operatore antisimmetrico. Si dimostri che $\lambda = 0$ è l'unico eventuale autovalore reale di F.