Matematica per l'economia e la statistica 2
Appello del 27/06/2016

1. (a) (2 punti) Sia $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un sistema di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Si determini se il sistema $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, dove $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, è linearmente indipendente, motivando la risposta.

   (b) (3 punti) Si determinino i valori del parametro reale a per cui il sistema di vettori $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

   (c) (3 punti) Data la matrice $\mathbf{A}$ e il vettore $\mathbf{b}$ così definiti

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k^2 \\ 0 & 3 & k+1 \\ k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} k-1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzioni $\mathbf{x} \geq 0$ (cioè $x_i \geq 0\ \forall i$).

2. (a) (3 punti) Sia $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 e $\mathcal{B} = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$ una sua base. Si trovi il vettore di rappresentazione di $p(t) = 3 + t - t^2$ rispetto a $\mathcal{B}$.

   (b) (2 punti) Sia $F\colon \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita

$$F(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}.$$

   Si trovi una base per il nucleo e per l'immagine di F.

3. (a) (1 punto) Si dia la definizione di matrice simmetrica.

   (b) (3 punti) Si determini per quali valori reali di x, y, z la seguente matrice risulta simmetrica (i indica l'unità immaginaria e $|\cdot|$ è il modulo)

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & \log_2(z) & \log_2(x^2-2x) \\ 2 & -1 & |3+yi| \\ \log_2(4-2x) & 5 & y^2-1 \end{pmatrix}.$$

   (c) (1 punto) Si determini la forma quadratica $Q(x)$ associata alla matrice A.

   (d) (3 punti) Si studi il segno della forma quadratica $Q(x)$.

4. (a) (3 punti) Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare. Si dimostri che

$$\langle u, v\rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} \quad \forall u, v \in V.$$

(b) (3 punti) Sia $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dotato del seguente prodotto scalare

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Si applichi il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

(c) (3 punti) Siano V uno spazio vettoriale reale e $F \in \mathcal{L}(V)$. Supponiamo che V abbia una base formata da autovettori di F. Si dimostri che traccia$(F^2) \geq 0$.