

Teorema: Rango riga e rango colonna di A sono uguali. (2)

Dim.

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$. Supponiamo che il rango riga di

A sia r e che i seguenti r vettori formino una base per lo spazio riga:

$$S_1 = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m})$$

$\vdots$

$$S_r = (\beta_{r1}, \dots, \beta_{rm})$$

Allora ogniettore riga di A è c.l. di $S_1, \dots, S_r$, ossia:

$$\begin{cases} A_1 = \lambda_{11} S_1 + \dots + \lambda_{1r} S_r \\ \vdots \\ A_m = \lambda_{m1} S_1 + \dots + \lambda_{mr} S_r \end{cases}, \text{ con } \lambda_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Da cui si ha:

$$\begin{cases} a_{1i} = \lambda_{11} \beta_{1i} + \dots + \lambda_{1r} \beta_{ri} \\ a_{2i} = \lambda_{21} \beta_{1i} + \dots + \lambda_{2r} \beta_{ri} \\ \vdots \\ a_{mi} = \lambda_{m1} \beta_{1i} + \dots + \lambda_{mr} \beta_{ri} \end{cases}, \text{ con } i = 1, \dots, m.$$

Riscrivendo si ha:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \beta_{1i} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \beta_{ri} \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}$$

colonna i -esima di A , moltiplicata con β_{1i}

Questo significa che ciascuna colonna A^i di A è c.l. di

$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}$. Questo implica che lo spazio colonna di

A ha $\dim. \leq r \Rightarrow$ rango colonna di $A \leq$ rango riga di A .

Supponiamo che il rango colonna di A sia r' e che i seguenti vettori formino una base per lo spazio colonna:

$$T^1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}, \dots, T^{r'} = \begin{pmatrix} x_{1r'} \\ \vdots \\ x_{mr'} \end{pmatrix}.$$

Allora ogni colonna di A è c.l. di $T^1, \dots, T^{r'}$, ossia:

$$\begin{cases} A^1 = \lambda_{11} T^1 + \dots + \lambda_{r'1} T^{r'} \\ \vdots \\ A^m = \lambda_{1m} T^1 + \dots + \lambda_{r'm} T^{r'} \end{cases}, \text{ con } \lambda_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Da cui si ha:

$$\begin{cases} a_{i1} = \lambda_{11} x_{i1} + \dots + \lambda_{r'1} x_{ir'} \\ a_{i2} = \lambda_{12} x_{i1} + \dots + \lambda_{r'2} x_{ir'} \\ \vdots \\ a_{im} = \lambda_{1m} x_{i1} + \dots + \lambda_{r'm} x_{ir'} \end{cases}, \text{ con } i = 1, \dots, m$$

ossia

$$A_i = (a_{i1}, \dots, a_{im}) = x_{i1} (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1m}) + \dots + x_{ir'} (\lambda_{r'1}, \dots, \lambda_{r'm})$$

vale a dire che ogni riga di A è c.l. dei vettori

$$(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1m}), \dots, (\lambda_{r'1}, \dots, \lambda_{r'm}).$$

Questo implica che lo spazio delle righe di A ha $\dim \leq r'$

$$\Rightarrow \text{range riga di } A \leq \text{range colonna di } A$$

①

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow \text{range riga di } A = \text{range colonna di } A.$$

Q.E.D.