LEZIONE 23

30/10/17 ①

ESERCIZIO

$$\det\begin{bmatrix}1 & i\\ 2-i & 3\end{bmatrix} = 1\cdot 3-(2-i)\,i = 3-2i+i^2 = 3-2i-1 = 2-2i$$

ESERCIZIO

$$\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} + 1\cdot\det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = 2\cdot(1\cdot 2-0\cdot 0)+1(0\cdot 0-1\cdot 1)$$

$$= 2\cdot 2-1 = \underline{\underline{3}}$$

Controllo con la regola di Sarrus:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}}_{\text{SPIEG.}} = 2\cdot 1\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1 = 4-1 = 3$$

Oppure: la colonna più conveniente (per l'"abbondanza" degli zeri) è la seconda.

$$\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix} = (-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = 1\cdot(2\cdot 2-1\cdot 1) = \underline{\underline{3}}$$

ESERCIZIO

Sviluppo di Laplace secondo gli el.ti della 1ª colonna

$$\det\overbrace{\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & \boxed{0 \quad 0 \quad 0}\end{bmatrix}}^{A} = (-1)^{4+1}\cdot 2\cdot\det\underbrace{\begin{bmatrix}4 & 1 & 3\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{B} = -2\cdot(-1)^{3+1}\cdot 1\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 0\end{bmatrix} =$$

$$= -2(1\cdot 0-3\cdot 5) = \underline{30}$$

Tutti gli altri A_{j1} contengono la riga $[0\ 0\ 0]$, dunque $\det(A_{j1})=0$ se $j<4$.

Tutti i B_{h1} contengono la riga $[0, 0]$ se $h<3$.

ESERCIZIO Calcolare

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} =$$

{ Questo è sì un esercizio sul calcolo del determinante di una matrice, ma è anche un esercizio su come usare il Principio di Induzione. Quindi;

Conviene calcolare qualche caso di n piccolo:

$\boxed{n=2}$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1\cdot 2 - 2\cdot 2 = \underline{-2} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{n=3}$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \overset{(R_3 \rightsquigarrow R_3 - R_2)}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{(R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1)}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -(2\cdot 0 - 3 \cdot 1) = \underline{3}$$

$\boxed{n=4}$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sviluppo di Laplace secondo l'ultima colonna

Quello che si cerca è uno "schema chiaro" che si ripeta.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{(R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1),\ (R_3 \rightsquigarrow R_3 - R_1)}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{(R_3 \rightsquigarrow R_3 - R_2)}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det(I_3) = 1$$

Analogamente:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{(R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1)}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \det(I_2) = 1$$

Giocando con gli n "piccoli" abbiamo trovato la soluzione dell'esercizio. Questa <u>non</u> usa il Principio di Induzione perché manca il PASSO INDUTTIVO!

Riassumo quel che abbiamo capito: 30/10/17 ③

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}}_{n\times n} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

← sviluppo di Laplace secondo gli el.ti dell'ultima colonna.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_n \rightsquigarrow R_n - R_{n-1} \\ R_{n-1} \rightsquigarrow R_{n-1} - R_{n-2} \\ \quad = = \\ R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1 \end{array} \right\}$$

(!) queste operazioni elem. sulle righe non cambiano il determinante

$$= (-1)^{1+n}\, n \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{=1 \quad \text{SPIEGARE}} = \underline{(-1)^{n+1}\cdot n}$$

le sottomatrici incorniciate in rosso sembrerebbero promettenti per l'induzione, ma ....

ESERCIZIO Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

Se due di loro sono uguali, allora la matrice ha due colonne uguali e prevedo che il det. sia nullo.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \underset{R_2 \rightsquigarrow R_2 - aR_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \underset{R_3 \rightsquigarrow R_3 - a^2R_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix} =$$

SPIEG.

$$= (-1)^{1+1}\cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} \underline{b-a} & \underline{c-a} \\ \underline{(b-a)}(b+a) & \underline{(c-a)}(c+a) \end{bmatrix} =$$

← SPIEGARE

$$= (b-a)(c-a)\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c+\cancel{a}-b-\cancel{a}) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

Effettivamente, se due tra a, b, c sono uguali $\det(A) = 0$.

La volta scorsa (RIASSUNTO):

$c \in \mathbb{R}^*$ $a \in \mathbb{R}$

- I tre tipi di matrici elementari S_{ih}, $M_{i,c}$, $E_{ih,a}$

$\det(S_{ih}) = -1$ $\det(M_{i,c}) = c$ $\det(E_{ih,a}) = 1$

Tutte le matrici sono $n \times n$

- Effetto quando si moltiplica una di queste matrici elementari, a sinistra, per una matrice A $n \times n$. "EA"

- LEMMA $A \in \mathcal{M}_n$, $E \in \mathcal{M}_n$ elementare, allora

(1) $\boxed{\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)}$

- L'algoritmo di eliminazione di Gauss si può interpretare come moltiplicazione successiva a sinistra per ~~[illegible]~~ matrici elementari:

$A \in \mathcal{M}_n$ $A \rightsquigarrow A'$ con l'eliminazione di Gauss.

Allora (2) $\boxed{A' = E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A}$ con $E_1, \dots, E_k$ matrici elementari dei vari tipi.

- A' è matrice $n \times n$ a gradini. Allora

$A' = I_n$ oppure l'ultima riga di A' è nulla $A' = \left[\begin{array}{ccc} * & & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ $\underline{\det(A') = 1}$ oppure $\underline{\det(A') = 0}$

- (1) e (2) $\Rightarrow$ (per induzione su k)

(3) $\det(A') = \underbrace{\det(E_k)}_{\neq 0} \cdots \underbrace{\det(E_1)}_{\neq 0} \cdot \det(A) \Rightarrow$

$$\det(A) = \underbrace{\frac{1}{\det(E_k)}}_{} \cdots \underbrace{\frac{1}{\det(E_1)}}_{} \underbrace{\det(A')}_{=1 \text{ o } =0} = \dots$$

se "controllo" questi, allora "controllo" $\det(A)$

- **TEOREMA** $\delta : M_n \to \mathbb{R}$ funzione t.c.
$\delta(I_n) = 1$, δ è multilineare e δ è alternante.
Allora $\underline{\delta = \det}$.

Esempio di δ: fisso j intero $1 \le j \le n$ $A \in M_n$

$$\delta(A) = (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{j+2} a_{2j} \det(A_{2j}) + \dots +$$
$$+ (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A_{nj})$$

Verifica le tre proprietà richieste. Dunque $\delta(A) = \det(A)$.

Quindi possiamo calcolare un determinante secondo gli elementi di una qualsiasi colonna. Bisogna stare attenti ai segni. Una tale formula si chiama sviluppo di Laplace di $\det(A)$.

~~(2) $A' = E_k \dots E_1 A$~~

~~${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ si generalizza ${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$ ecc.~~

~~Applicata a (2)~~

~~${}^t(A') = {}^tA\,{}^tE_1 \dots {}^tE_k$~~

TEOREMA DI BINET $A, B \in M_n$ qualsiasi, allora

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

Dim. Se A è matrice elementare, allora è il Lemma.

Se $A' = I_n$, allora $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$ SPIEG.

Tutte le matrici E_i^{-1} sono ancora matr. elementari

Allora dal Lemma segue, innanzitutto (per induzione su k):

$$\det(A) = \det(E_1^{-1})\det(E_2^{-1}) \cdot \ldots \cdot \det(E_k^{-1})$$

Infine:

$$\det(AB) = \det(E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}B) \overset{\text{Lemma}}{=}$$

$$= \det(E_1^{-1}) \cdot \det(E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}B) \overset{\text{Lemma}}{=} \ldots \overset{\text{Lemma}}{=}$$

$$= \underbrace{\det(E_1^{-1}) \cdot \ldots \cdot \det(E_k^{-1})}_{=\det(A)} \cdot \det(B)$$

Infine, sia $A' = \begin{bmatrix} * \\ \hline 0 \ldots 0 \end{bmatrix}$ Allora $\det(A') = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \underline{\det(A) = 0}$

$$E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 (AB) = (E_k \cdot \ldots \cdot E_1 A) B = A'B$$

ha l'ultima riga $=0$

Quindi anche $A'B$ ha l'ultima riga tutta nulla.

Dunque:

$$0 = \det(A'B) = \det(E_k \cdot \ldots \cdot E_1 AB) \overset{\text{Lemma}}{=} \det(AB)$$

$$e \ \det(A)\det(B) = 0 \cdot \det(B) = 0 \quad \blacksquare$$

${}^tS_{ik} = S_{ik}$ ${}^tM_{i,c} = M_{i,c}$

${}^tE_{ik,a}$ è ancora dello stesso tipo.

$A' = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 A$ le applico ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ SPIEGARE

${}^t(A') = {}^tA\,{}^tE_1 \ldots {}^tE_k$

Se $A' = \begin{bmatrix} * \\ \hline 0 \ldots 0 \end{bmatrix}$ allora si vede che $\underline{\det({}^tA') = 0}$

Allora per il Teorema di Binet:

$$\det({}^tA') = \det({}^tA)\cdot\det({}^tE_1)\cdot\ldots\cdot\det({}^tE_k) \implies$$

$$\det({}^tA) = \det({}^tA')\cdot\frac{1}{\det({}^tE_1)}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\det({}^tE_k)}$$

$$= \det(A')\cdot\frac{1}{\det(E_1)}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\det(E_k)} = \det(A)$$

Quindi, per ogni $A \in M_n$ $\boxed{\det(A) = \det(A')}$

Conseguenza importante:
si può calcolare $\det(A)$ anche facendo lo sviluppo di Laplace secondo gli elementi di una fissata riga di A