vettore b è combinazione lineare dei vettori $a^1, \dots, a^n$, cioè se $b \in \langle a^1, \dots, a^n \rangle$: spazio delle colonne di A.

In tal caso una soluzione è data dai coefficienti di una comb. lin. di $a^1, \dots, a^n$ uguale a b. Se $a^1, \dots, a^n$ sono in più linearmente indipendenti, la soluzione è unica.

Es. Sistema omogeneo: se le colonne di A sono lin. dipendenti, ci sono soluzioni non nulle.

Ogni colonna è un vettore di K^m; le colonne sono n: se $\boxed{n > m}$ certamente il sistema ha soluzioni non banali.

Es. Caso $m = n$.

Ho tante equazioni quante incognite. Se le colonne sono lin. indip., costituiscono una base di K^n. Allora, qualunque sia b, il sistema ha 1! soluzione.

Primo metodo di risoluzione dei sistemi lineari: <u>algoritmo di eliminazione di Gauss.</u>

Si trasforma il sistema di partenza (*) in un sistema lineare equivalente, mediante trasformazioni elementari nella matrice completa $(A \vdots b)$.

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Trasformazioni elementari di matrici.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

I tipo: moltiplicazione di una riga per uno scalare $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{I} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

II tipo: addizione della j-esima riga alla i-esima

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

III tipo: addizione alla i-esima riga di un multiplo della j-esima

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{III} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad III = I_j \to II \to I_j.$$

IV tipo: scambio di 2 righe

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

si può ottenere applicando I e II (Fischer, pag. 94)

Prop Lo spazio delle righe di A non cambia applicando trasformaz. elementari.

Prop. Dato il sistema lineare $(*)$, consideriamo la matrice completa $(A \mid b)$. Se si applicano ad $(A \mid b)$ trasformaz. elementari, si ottiene un sistema lineare equivalente.

L'algoritmo di eliminazione di Gauss fa passare da un sistema lineare $(*)$ ad un sistema lui equivalente, mediante trasformazioni elementari che è "facile" da risolvere.
La matrice completa viene trasformata in una matrice a gradini o a scala.

Def. Matrice a gradini è una matrice della forma:

$$\begin{array}{cc}
B = & \left(\begin{array}{cccccccccc}
0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & 0 & 0 & p_2 & * & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & p_r & * \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & & 0 & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & & &
\end{array}\right) \\
& \begin{array}{cccccccccc}
 & & & \uparrow j_1 & & \uparrow j_2 & & \uparrow j_r & &
\end{array}
\end{array}$$

dove $p_1, p_2, \dots, p_r$ sono $\neq 0$.
Sotto la "scala" è tutto 0.
Gli elementi $p_1, \dots, p_r$ sono i pivot della matrice. Sono nelle colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$.
Un sistema lineare è a gradini se lo è la sua matrice completa.

p_1 è il primo elem. non nullo della matrice: primo pivot. Sotto è tutto 0; p_2 è il primo elem. non nullo della 2ª riga ecc.

Le righe $b_1, b_2, \dots, b_r$ sono lin. indip., e le successive sono nulle, allora $b_1, \dots, b_r$ formano una base dello spazio delle righe di B, e $r = rg(B)$ (per righe).

Dim.

Se $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r = 0$, si ha:

$$\lambda_1(0\dots0\,p_1 * \dots) + \lambda_2(0\dots0\,p_2 * \dots) + \dots + \lambda_r(0\dots p_r * \dots) =$$

$$= (0\dots0\,\lambda_1 p_1, \lambda_1 *, \lambda_1 * + \lambda_2 p_2, \dots)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$, rimane $\lambda_2(0\dots0\,p_2 * \dots) + \dots$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0$ ecc.

Algoritmo

Parto da una matrice $A \in M(m \times n, K)$ e la trasformiamo in una matrice B a scala. Se A è nulla abbiamo finito. Altrimenti sia a^{j_1} la prima colonna non nulla. Scambiando eventualmente la prima riga con una successiva, poniamo su pp. che $a_{1j_1} \neq 0$ e poniamo $p_1 = a_{1j_1}$. Ora sommiamo alla riga h-esima, $\forall h \geq 2$, un opportuno multiplo della prima, in modo da annullare tutti gli elementi sotto a_{1j_1}. D'ora in poi la prima riga resta fino. Consideriamo le righe dalla seconda in poi: se sono tutte nulle abbiamo finito, (oppure se la matrice ha una sola riga); altrimenti ~~scambiando~~ sia j_2 la prima colonna che contiene un elem. non nullo, e supponiamo, eventualmente scambiando la seconda con una riga successiva, che sia nella seconda riga: $p_2 = a_{2j_2}$. Ora annulliamo tutti gli elem. sotto p_2 sommando alla riga h-esima, con $h \geq 3$, un multiplo della seconda. E così via, finché si arriva ad avere le ultime righe tutte nulle, oppure l'ultimo pivot nell'ultima riga.

Esempio $K = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

primo pivot

colonna nulla

colonna non nulla

$$\xrightarrow{III} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

colonna nulla sotto il primo elem.

meglio avere 1 come pivot

$$\xrightarrow{IV} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

posso farlo diventare 1 con la I

Il rango è 3; i pivot sono nelle colonne

$j_1 = 2$, $j_2 = 4$, $j_3 = 5$.

b_1, b_2, b_3 sono lin. indip.

Se un sistema lineare ha la matrice completa a gradini, lo si risolve con il metodo di risoluzione all'indietro.

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

a gradini. Parto dall'ultima.

$$\begin{cases} 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{2} \quad \text{sostituisco} \\ x_2 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ x_1 = +3 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{array}$$

Il sistema ha 1! soluzione.

Scrittura per indicare i sistemi lineari:

(*) $Ax = b$

(**) $Ax = 0$

Prop.

(i) Sia $W = \{v \in K^n \mid Av = 0\}$, soluzioni del sistema omogeneo, è un sottospazio vettoriale di K^n.

Supp. (*) compatibile.

(ii) $S = \{v \in K^n \mid Av = b\}$ non è un sottosp. vett. se il sist. non è omogeneo, è del tipo $S = \bar{v} + W$, dove $\bar{v}$ è una soluzione particolare
$\{\bar{v} + w \mid w \in W\}$

Dim.

(i) $W \ni 0$ ed è chiuso risp. a somme e prod. esterno.

(ii) Se il sist. non è omogeneo, 0 non è una soluzione, quindi S non è sottospazio.
Se $Aw = 0$, e $A\bar{v} = b \Rightarrow A(\bar{v} + w) = b$.
Viceversa se $A\bar{v} = b$ e $Av = b \Rightarrow A(v - \bar{v}) = 0$
e quindi $v - \bar{v} \in W$. ∎

$\bar{v} + W$ è un laterale di W in K^n/W, è la classe di $\bar{v}$.

Ma si ha anche:

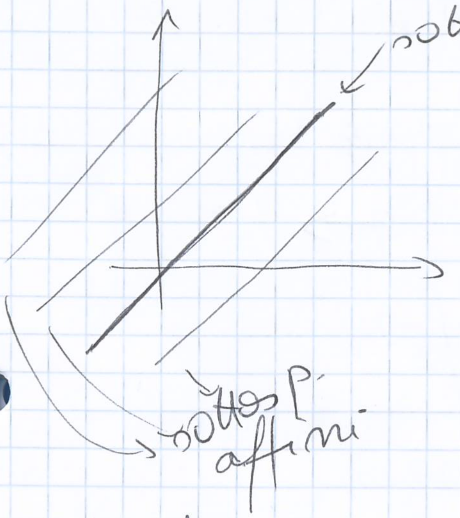
Def. V sp. vettoriale
un sottosp. affine di V è un sottoinsieme del tipo $S = v + W$, W sottosp. vett. detto passante per v

giacitura di S.

Se $u \in S$, $u = v + w$, allora $u + W = v + W$.

$u + w' = v + (w + w') \in v + W$.

$v + w' = (u - w) + w' = u + (w' - v) \in u + W$.



Posso sostituire v con qualunque altro punto di S.

Si pone $\dim S = \dim W$.

Se $\dim W = 0$, trovo i singoli elementi di V

Risoluzione dei sistemi omogenei: come trovare $\dim W$ e una sua base (W sp. delle soluz.)

Es.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 - 4x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 = 0 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 + 2x_6 - x_7 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 0 \end{cases}$$

matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & +2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

a gradini

rango 4

Il sist. è

$$\begin{cases} x_6 + 2x_7 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 = 0 \\ x_2 + 2x_4 - x_5 - 4x_6 = 0 \end{cases}$$

x_7 libero

$x_6 = -2x_7$

$x_5 = -x_6 = 2x_7$

x_4 libero

$x_3 = x_4 + x_5 - 2x_6 - x_7 =$

$= x_4 + 2x_7 + 4x_7 - x_7 =$

$= x_4 + 5x_7$

$x_2 = -2x_4 + x_5 + 4x_6$

$= -2x_4 + 2x_7 - 8x_7$

$= -2x_4 - 6x_7$

x_1 libero

Parametri liberi sono le incognite ~~contenute~~ delle colonne non contenenti i pivot.

Soluzione generale del sistema è:

$$(x_1, -2x_4 - 6x_7, x_4 + 5x_7, x_4, 2x_7, -2x_7, x_7) =$$
$$= x_1(1,0,0,0,0,0,0) + x_4(0,-2,1,1,0,0,0) +$$
$$+ x_7(0,-6,5,0,2,-2,1)$$

$$\boxed{= x_1 w_1 + x_4 w_2 + x_7 w_3}$$

w_1, w_4, w_7 sono tre indipendenti, perché se $x_1 w_1 + x_4 w_2 + x_7 w_3 = 0$, si ha $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_7 = 0$ in quanto sono alcune delle componenti della sol.

$\Rightarrow$ base dell' ~~sist.~~ spazio delle soluzioni

Ha dim $3 = \underbrace{7}_{\#\text{var.}} - \underbrace{4}_{\text{rango}}$

In gen. $Ax = 0$ in K^n si ha:

dim W = numero di param. liberi =

$= n -$ (numero dei pivot) $= n - rg(A) = n - r$.

Teorema di Rouché–Capelli:

Il sist. $Ax = b$ è compatibile $\Longleftrightarrow$

$rg\, A = rg(A|b)$ (rango per righe)

Dim. $(A|b) \xrightarrow{\text{trasf. elem.}} (B|c)$ B a gradini

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{b_{1j_1}} & & & c_1 \\ & \boxed{b_{2j_2}} & & \vdots \\ & & \boxed{b_{rj_r}} & c_r \\ & 0 & & c_{r+1} \\ & & & \vdots \\ & & & c_m \end{array}\right)$$

$Ax = b$ è comp.

$\Updownarrow$

$c_{r+1} = \dots = c_m = 0$

Con la stessa sequenza di trasformaz. elem. trasformo in matrici a gradini sia A sia $A' = (A \vdots b)$. Sia $r = rg(A)$

I ranghi sono diversi se e solo se nell'ultima colonna ho più di r elementi:

~~Ma~~ Ho un pivot nella riga $r+1$.

In tal caso l'ultima equazione non è compatibile.

Ricapitolando: Sia A $m \times n$.

Il sist. lineare $Ax = b$ è compatibile se e solo se $rg A = rg(A \vdots b)$.

In particolare se il sistema è omogeneo è compatibile e ~~to sp~~ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione $n - r$, dove $r = rg(A)$.

Se il sistema non è omogeneo, ed è compatibile l'insieme delle soluzioni è del tipo

$S = \bar{v} + W_0$ dove $\bar{v}$ è una soluzione e W_0 è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato $Ax = 0$.

È ~~uno spazio~~ sottospazio affine di K^n di dimensione pari a $\dim W_0 = n - rg A = n - rg(A \vdots b)$.

Per risolvere il sistema, si riduce $(A \vdots b)$ a gradini. Dopo aver verificato che i ranghi siano uguali, si procede col metodo di sostituzione all'indietro, che fornisce una soluzione particolare e una base per W_0.

Esempio

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 - x_4 = 2$$
$$x_3 + x_4 = -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ compatibile

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

x_4 param. libero

$x_3 = -x_4 - 1$

x_2 param. libero

$x_1 = 2x_2 - x_3 + 1 = 2x_2 + x_4 + 1 + 1 = 2x_2 + x_4 + 2$

$(2x_2 + x_4 + 2, x_2, -x_4 - 1, x_4) =$

$= x_2 \underbrace{(2, 1, 0, 0)}_{w} + x_4 \underbrace{(1, 0, -1, 1)}_{w'} + (2, 0, -1, 0)$

$W_0 = \langle w, w' \rangle$ ha dim 2, (w, w') è una base.

$v = (2, 0, -1, 0)$ è una soluz. partic., ottenuta per $x_2 = x_4 = 0$.