LEZIONE 24

31/10/17

A LEZIONE IERI:

$n \geq 1$ intero fissato; $\delta : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione tale che

- $\delta(I_n) = 1$
- δ è lineare separatamente rispetto a ciascuna colonna di $A \in M_n$.
- Se $A \in M_n$ ha due colonne uguali, allora $\delta(A) = 0$

Allora $\delta = \det$.

PROPOSIZIONE

Se le colonne di A sono linearmente dipendenti, allora $\det(A) = 0$.

Dim. Sia $A = [C_1 \dots C_n]$, cioè C_i è l'i-esima colonna di A.

Supponiamo per ipotesi che esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, tali che

$$(1) \qquad \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n = 0 \in \mathbb{R}^n$$

Per fissare le idee, sia $\alpha_1 \neq 0$. Allora da (1) segue

$$C_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} C_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} C_n$$

per brevità chiamerò $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$

Allora

$$\det(A) = \det([C_1\, C_2 \dots C_n]) = \det([\lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_n C_n \quad C_2 \dots C_n]) \overset{\text{linearità risp. 1ª colonna}}{=}$$

$$= \lambda_2 \underbrace{\det([C_2\, C_2 \dots C_n])}_{=0} + \lambda_3 \underbrace{\det([C_3\, C_2\, C_3 \dots C_n])}_{=0} + \dots + \lambda_n \underbrace{\det([C_n \dots C_n])}_{=0} =$$

(per l'alternanza)

$= 0$ ∎

$C_1, \dots, C_n$ lin. dip. $\Rightarrow \det(A) = 0$

è equivalente a (logicamente)

$C_1, \dots, C_n$ lin. indip. $\Leftarrow \det(A) \neq 0$

Dunque se $A \in M_n$ è tale che $\underline{\det(A) \neq 0}$ allora siamo sicuri che le colonne di A sono linearm. indipendenti.

Consideriamo $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se $U \in \mathbb{R}^n$ penso U come matrice $n \times 1$. Allora $L_A(U) \stackrel{def}{=} AU$ prodotto $r \times c$. AU è ancora una matrice $n \times 1$.

Ricordiamo che le colonne di A sono rispettivamente

$C_1 = L_A(e_1) \quad C_2 = L_A(e_2) \quad \text{---} \quad C_n = L_A(e_n)$

Poiché $e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, e_2, \text{---}, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, (una base del dominio di L_A, dunque), allora $C_1, \text{---}, C_n$ generano $\mathrm{Im}(L_A)$.

Poiché sono linearmente indipendenti, e poiché $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, si conclude che $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^n$, cioè L_A è suriettiva.

Ma nella nostra situazione (CAPIRE !!!) questo implica anche che L_A è iniettiva. Dunque L_A è un isomorfismo. Allora esiste $L_A^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

t.c.

(✡) $\quad L_A \circ L_A^{-1} = id_{\mathbb{R}^n} \quad$ e $\quad L_A^{-1} \circ L_A = id_{\mathbb{R}^n}$

Sia $B = M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c}(L_A^{-1})$. Allora (CAPIRE !!!) $L_A^{-1} = L_B$.

Dalle (✡) segue, allora:

$$L_{AB} = L_A \circ L_B = L_A \circ L_A^{-1} = id_{\mathbb{R}^n} = L_{I_n} \Longrightarrow \underline{AB = I_n}$$

analogamente

$$L_{BA} = L_B \circ L_A = L_A^{-1} \circ L_A = id_{\mathbb{R}^n} = L_{I_n} \Longrightarrow \underline{BA = I_n}$$

Abbiamo dimostrato la

PROPOSIZIONE

Se $A \in \mathcal{M}_n$ è tale che $\det(A) \neq 0$, allora la matrice A è invertibile.

Verifichiamo, ora, che vale anche la proposizione inversa, cioè

$$A \in \mathcal{M}_n \text{ invertibile} \Longrightarrow \det(A) \neq 0$$

Dim.

Se A è invertibile, allora esiste $B \in \mathcal{M}_n$ tale che $AB = I_n$. Applico il Teorema di Binet:

$$\underbrace{1 = \det(I_n) = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

Se $\det(A) = 0$, allora $\uparrow$ implicherebbe $1 = 0$, assurdo. ■

(FIN QUI, FATTO IERI)

Quindi abbiamo la

PROPOSIZIONE

$A \in \mathcal{M}_n$ è invertibile $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

ESEMPIO

$n = 4$. Abbiamo visto ieri che

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}}_{=:A} = -4$$

Quindi sappiamo che A è invertibile.

Vogliamo trovare A^{-1}. ~~Per questo, applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss, oppure~~ $\boxed{\text{pag. 7}}$

O si usa l'alg. di elim. di Gauss, oppure:

A matrice $n \times n$

i, j interi fissati, con $1 \le i, j \le n$, allora ho la matrice $(n-1) \times (n-1)$ $\underline{A_{ij}}$ ottenuta da A sopprimendo l'i-esima riga e la j-esima colonna.

Formula di Laplace per lo sviluppo di $\det(A)$ secondo gli elementi dell'i-esima <u>riga</u>:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) \quad (1)$$

Formula di Laplace per lo sviluppo di $\det(A)$ secondo gli elementi della j-esima <u>colonna</u>

$$(2) \quad \det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj})$$

L'idea è di pensare (1) e (2) come entrate del prodotto righe per colonne di A per un'opportuna matrice C definita così

$$C = [c_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \qquad \underbrace{c_{ij} \overset{def}{=} (-1)^{i+j} \det(A_{\underbrace{ji}_{NB.}})}_{\text{è un cofattore di } A}$$

C matrice dei cofattori.

Allora (1) diventa

$$[a_{i1} \; a_{i2} \; \ldots \; a_{in}] \begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{bmatrix} = \det(A) \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

e (2) diventa

$$[c_{j1}\ \ c_{j2}\ \ \cdots\ \ c_{jn}] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \det(A) \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

PBL. Se $i \neq j$ che cos'è

$$\mu = a_{i1} c_{1j} + a_{i2} c_{2j} + \dots + a_{in} c_{nj} \quad ?$$

Possiamo pensarla così:

se $A = \begin{bmatrix} \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \end{bmatrix}$ sia $B = \begin{bmatrix} \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \end{bmatrix}$ Allora

$$\mu = \det(B) = 0$$

Quindi

$$\boxed{AC = \underbrace{\det(A)\, I_n}_{\text{SPIEG.}} = CA} \qquad \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & & \\ 0 & \det(A) & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ & & & \det(A) \end{bmatrix}$$

Se $\det(A) \neq 0$, allora da tale relazione segue

$$A\left(\frac{1}{\det(A)} C\right) = I_n = \left(\frac{1}{\det(A)} C\right) A \implies \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C}$$

Ritorniamo all'esempio della matrice 4×4 vista ieri.

Cominciamo col calcolare $\det(A_{ij})$ $\forall i, \forall j$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A_{11}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{4}} \quad \text{(V)}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A_{12}) = 4 = \det(A_{21}) \quad \text{(V)}$$

(A è simmetrica!)

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A_{22}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -2(3 \cdot 0 - 1 \cdot 4) = \underline{8} \quad \text{(V)}$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A_{33}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 0 - 4 \cdot 2) = \underline{8} \quad \text{(V)}$$

$\det(A_{44}) = \underline{\underline{3}}$ $\leftarrow$ SPIEG.

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A_{13}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad \text{(V)}$$

$R_3 - R_2 = R_2 - R_1$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = {}^tA_{13} \qquad \text{cmq. } \det(A_{31}) = \underline{0} \quad \text{(V)}$$

$$\underbrace{C = \begin{bmatrix} +4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & +8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & +8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & +3 \end{bmatrix}}_{\text{matr. dei \underline{COFATTORI} di } A}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_{23}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può verificare che

$$AC = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = CA \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-4} C$$

$$\text{dunque } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Se A è matrice $n \times n$ allora l'<u>esistenza</u> di una matrice B tale che $AB = I_n$ <u>OPPURE</u> $BA = I_n$ (una tale B è necessariamente $n \times n$) basta per concludere che A è invertibile. Infatti da una qualsiasi di tali relazioni si ricava col teorema di Binet che $\det(A) \neq 0$. E allora siamo a posto.

Per una matrice <u>rettangolare</u> A, $m \times n$, <u>non quadrata</u> $m \neq n$, può benissimo capitare che esista una matrice B tale che AB si possa fare ed il risultato sia una matrice identica

$A \quad m \times \cancel{n} \qquad AB$ si può fare $\Rightarrow B$ è $\cancel{n} \times p$

Allora AB è $m \times p$. Se deve essere la matrice identica, allora $m = p$. Cioè

$$\underset{m \times n}{A} \qquad \underset{n \times m}{B} \qquad \underset{m \times m}{AB = I_m}$$

In tal caso si può fare anche BA e questa è una matrice $n \times n$

Ma sicuramente $BA \neq I_n$.

Infatti possiamo usare A e B per costruire applicazioni lineari:

$$\mathbb{R}^n \underset{L_B}{\overset{L_A}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^m$$

Sappiamo che $AB = I_m$ (3)

$$\Rightarrow id_{\mathbb{R}^m} = L_{I_m} = L_{AB} = L_A \circ L_B$$

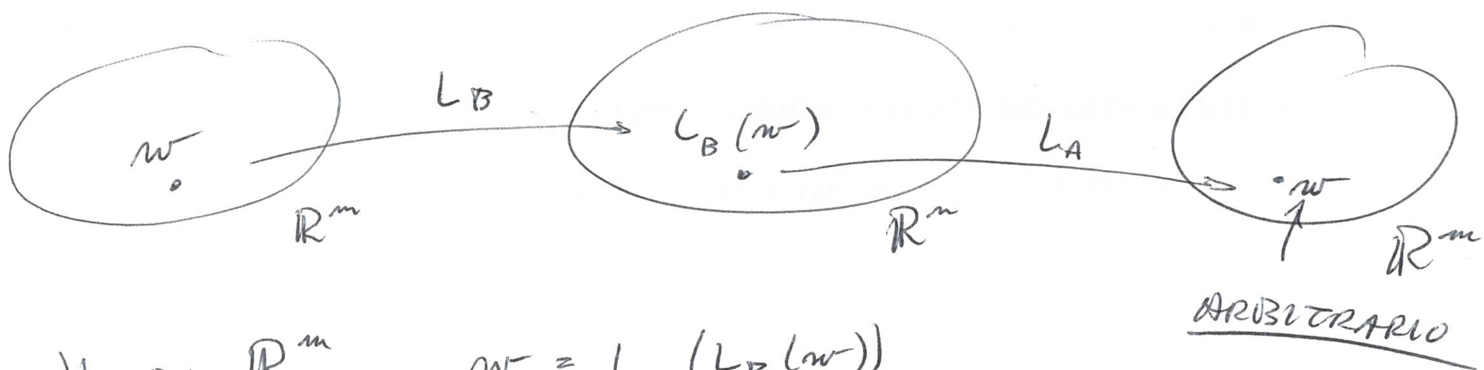
Se fosse anche $BA = I_n$, allora $L_B \circ L_A = id_{\mathbb{R}^n}$

Dunque L_A ed L_B sarebbero (entrambi) isomorfismi. Ma, allora $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$, assurdo.

Costruiamo un esempio concreto.

Ma prima possiamo ottenere ancora qualche informazione dalla (3).

$$AB = I_m \Rightarrow L_A \circ L_B = id_{\mathbb{R}^m}$$



$\forall w \in \mathbb{R}^m \quad w = L_A(L_B(w))$

$\Rightarrow$ <u>L_A è suriettiva</u> Allora

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\dim(\operatorname{Ker}(L_A))}_{\geq 0} + \dim(\operatorname{Im}(L_A))$$

$$\dim(\operatorname{Im}(L_A)) = m$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \quad n \geq m \\ \text{ma} \quad n \neq m \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\underline{n > m}}$$

Inoltre

$$m = \dim(\operatorname{Im}(L_A)) = rg(A) \qquad rg(A) = m$$

Allora pongo $m = 2$, $n = 3$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{rg(A) = 2}$

$$A = \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right] \\ L_A(e_1) & L_A(e_2) & L_A(e_3) \end{array}$$

$\underbrace{L_A(e_1) \quad L_A(e_2)}$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ formano una base di $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g = ?} \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$

Uso il Teorema di determinazione di un'applicazione lineare:

$$g(v_1) = e_1 \qquad g(v_2) = e_2$$

Una tale g <u>esiste</u> ed è <u>unica</u>

$$(L_A \circ g)(v_1) = L_A(g(v_1)) = L_A(e_1) = v_1$$

$$(L_A \circ g)(v_2) = \underline{\qquad\qquad\qquad} = v_2$$

Allora per il T.D. APP. LIN $\qquad L_A \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$

Quel che voglio è la matrice B. Ora

$A = M^{\mathcal{B}_c}_{\underline{\underline{\mathcal{B}'_c}}}(L_A)$ Quindi

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}'_c & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}_c \end{array}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} v_2 \implies g(\varepsilon_1) = g\left(\frac{1}{3} v_2\right) = \frac{1}{3} g(v_2) = \frac{1}{3} e_2$$

$$\varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} = v_1 - \frac{1}{3} v_2$$

$$g(\varepsilon_2) = g(v_1) - \frac{1}{3} g(v_2) = e_1 - \frac{1}{3} e_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$B = M^{\mathcal{B}'_c}_{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} g(\varepsilon_1) & \quad g(\varepsilon_2) \end{array} & \end{array}$$

Verifiche:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha $rg = 2$

SPIEGARE!