LEZIONE 25 PRODOTTI SCALARI 6/11/17 (1)

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim(V) = n$.

Abbiamo bisogno di un metodo per assegnare ad ogni $v \in V$ un suo "modulo", ed anche per assegnare ad ogni coppia $u, v \in V$ l'"angolo" formato da tali vettori

Def. Un PRODOTTO SCALARE su V è un'applicazione

$$\varphi(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \mapsto \varphi(u,v)$$

SPIEG.

2° argomento

1° argomento

che verifica le seguenti proprietà:

1. φ è BILINEARE:

$\varphi(u+u', v) = \varphi(u,v) + \varphi(u',v) \quad \forall u, u', v \in V$

$\varphi(\lambda u, v) = \lambda \varphi(u,v) \quad \forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(u, v+v') = \varphi(u,v) + \varphi(u,v') \quad \forall u, v, v' \in V$

$\varphi(u, \lambda v) = \lambda \varphi(u,v) \quad \forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

"bilineare" = "bi-lineare", cioè lineare separatamente in ciascuno dei due argomenti.

2. φ è SIMMETRICA:

$\varphi(u,v) = \varphi(v,u) \quad \forall u, v \in V$

3. φ è DEFINITA POSITIVA:

$\varphi(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in V \quad$ e $\quad \langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

NMB !!! (Nota MOLTO Bene)

ESEMPIO 1

$V = \mathbb{R}^2 \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ arbitrari.

$$\varphi(u,v) = 2u_1\underline{v_1} + 2u_1\underline{\underline{v_2}} + 2u_2\underline{v_1} + 5u_2\underline{\underline{v_2}}$$

Verificare che φ è un prodotto scalare.

$$\varphi(u,v) = (2u_1 + 2u_2)v_1 + (2u_1 + 5u_2)v_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 2u_1 + 2u_2 & 2u_1 + 5u_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}^{M}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}$$

Allora la bilinearità di φ segue subito dalle proprietà del prodotto R×C di matrici SPIEG.

Osservo che la matrice M è simmetrica: $M = {}^tM$.

Verifico che φ è simmetrica:

$$\varphi(v,u) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}{}^tM\,{}^t\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = {}^t\Big(\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}}\Big)$$

SPIEG. $= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \varphi(u,v)$

Infine verifico che φ è definito positivo

$$\varphi(u,u) = 2u_1^2 + 4u_1u_2 + 5u_2^2 = 2\underbrace{(u_1+u_2)^2}_{\geq 0} + 3\underbrace{u_2^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\varphi(u,u) = 0 \iff 2\underbrace{(u_1+u_2)^2}_{\overset{\shortparallel}{0}} + 3\underbrace{u_2^2}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0 \quad \text{entrambi } 0$$

$\left.\begin{array}{l} u_2 = 0 \\ u_1 + u_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$u_2 = 0,\ u_1 = 0$

$\Rightarrow u = 0 \in \mathbb{R}^2$

Oss.

$u = 0 \Rightarrow \varphi(0,0) = 0$ è conseguenza della bilinearità

C'è un modo più "pulito" di trovare la matrice M?

$\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ sia la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \qquad v = v_1 e_1 + v_2 e_2$

$\varphi(u, v) = \varphi(u, v_1 e_1 + v_2 e_2) = \varphi(u, v_1 e_1) + \varphi(u, v_2 e_2) =$

$= v_1 \varphi(u, e_1) + v_2 \varphi(u, e_2) = v_1 \varphi(u_1 e_1 + u_2 e_2, e_1) + \ldots =$

$= v_1 u_1 \varphi(e_1, e_1) + v_1 u_2 \varphi(e_2, e_1) + v_2 u_1 \varphi(e_1, e_2) + u_2 v_2 \varphi(e_2, e_2)$

$u_1 v_1 \cdot 2 \quad + u_2 v_1 \cdot 2 \quad + u_1 v_2 \cdot 2 \quad + u_2 v_2 \cdot 5$

Quindi

$$M = \begin{bmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{bmatrix}$$

<u>ESEMPIO 2</u> $V = \mathbb{R}^n$. Penso i vettori di V come matrici "colonna": $n \times 1$. Definisco il P.S. <u>STANDARD</u>:

$$\langle u, v \rangle_{st} \overset{def}{=} {}^t u\, v = \underline{{}^t u\, I_n\, v} = [u_1 \ldots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Le tre proprietà sono facili.

Se $n = 2$

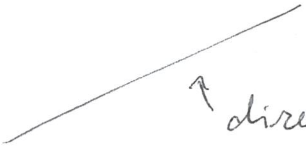
$$\langle u, v \rangle_{st} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\langle \, , \, \rangle_{st} \neq \varphi(\, , \,)}$$

Ad esempio $\langle e_1, e_2 \rangle_{st} = 0$ mentre $\varphi(e_1, e_2) = 2$

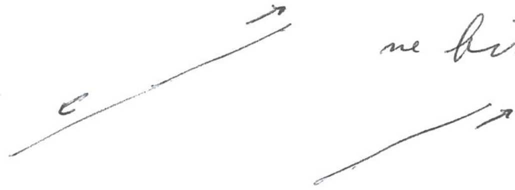
Quindi: <u>su uno stesso spazio vettoriale abbiamo prodotti scalari diversi</u>

<u>Alle superiori</u> (se è andata di lusso...)

- Un <u>vettore</u> (in Fisica) è una grandezza determinata da direzione, verso e modulo



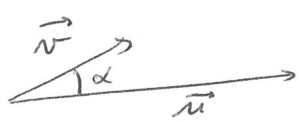
↑ direzione; ha due versi e ne fisso uno



} esempi di vettori aventi stessa direzione e verso, ma moduli distinti.

- Il prodotto scalare di due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ era dato da $u v \cos(\alpha)$ "u": il modulo di $\vec{u}$

$$\underset{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\overset{\shortparallel}{}}$$



α è l'angolo convesso tra i vettori $\vec{u}, \vec{v}$.

Cioè $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Quindi due vettori sono ortogonali $\Longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \cos(\alpha) = 0$
$\Longleftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

Prendiamo lo spunto da tutto questo per la

<u>Def.</u> Se $\langle \, , \rangle$ è un (qualsiasi!) prodotto scalare sullo spazio vettoriale V, allora $u, v \in V$ si dicono <u>ORTOGONALI</u> rispetto $\langle \, , \rangle$ se $\langle u, v \rangle = 0$ "$u \perp v$"

Si tratta di un concetto <u>relativo</u>, cioè dipende dalla scelta del prodotto scalare.

Ad esempio, prendiamo $V = \mathbb{R}^2$ $u = e_1$, $v = e_2$. Allora $\varphi(e_1, e_2) = 2 \Rightarrow e_1, e_2$ non sono ortogonali risp. φ.

Ma $\langle e_1, e_2 \rangle_{st} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, quindi $e_1 \perp e_2$ risp. $\langle \, , \rangle_{st}$.

Sia fissato un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ su V.

Def. Per ogni $u \in V$ chiameremo <u>NORMA</u> di u (rispetto $\langle -,- \rangle$!!! Si tratta ancora di un concetto <u>relativo</u>)

il numero reale $\|u\| \overset{def}{=} +\sqrt{\langle u,u \rangle}$

Qui è essenziale la proprietà di $\langle\ ,\ \rangle$ di essere definito positivo.

& QUI è il primo punto in tutto il corso di Geometria in cui si usa una proprietà particolare dei numeri reali: l'esistenza della $\sqrt{\ }$ di un numero reale ≥ 0.

Per esempio, se penso 2 come numero razionale: $2 \in \mathbb{Q}$, allora <u>non esiste</u> <u>$a \in \mathbb{Q}$</u> t.c. $a^2 = 2$.

Ma esiste <u>$b \in \mathbb{R}$</u> t.c. $b^2 = 2$

$\langle -,- \rangle$ def. positivo implica anche $\|u\| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow u = 0_V$

<u>ESEMPIO</u> $V = \mathbb{R}^2$ $u = e_2$ Allora $\varphi(e_2, e_2) = 5 \Rightarrow$

$\|e_2\|_\varphi = \sqrt{5}\ (>2)$. $\langle e_2, e_2 \rangle_{st} = 1 \Rightarrow \|e_2\|_{st} = 1$

Se $\|u\|_{\langle\ ,\ \rangle} = 1$ allora u si dice <u>VERSORE</u> risp. $\langle -,- \rangle$

$u \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ qualsiasi $\|\lambda u\|_{\langle\ ,\ \rangle} = ?$

$$\|\lambda u\| = +\sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = +\sqrt{\lambda^2 \langle u,u \rangle} = \underbrace{+\sqrt{\lambda^2}}_{\geq 0}\sqrt{\langle u,u \rangle} = |\lambda|\,\|u\|$$

Devo usare il valore assoluto.

Se $u \in V$, $u \neq 0_V$, è qualsiasi allora $\|u\| > 0$

$$\frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\|u\|} \cdot u \qquad \left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| = \frac{1}{\underbrace{\|u\|}_{>0}} \cdot \|u\| = 1$$

$\frac{u}{\|u\|}$ è un versore.

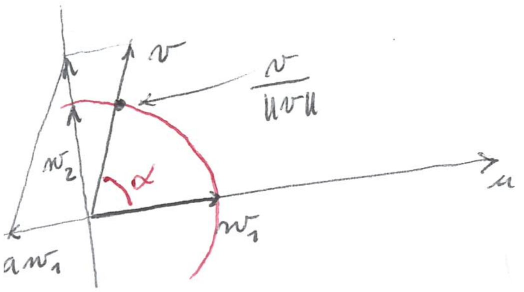
ESEMPIO 3

Su $V=\mathbb{R}^3$ consideriamo $\langle -,- \rangle_{st}$.

Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti.

$u \neq 0$ $\quad w_1 = \frac{u}{\|u\|}$ è un versore $\quad \boxed{u = \|u\| \, w_1}$

ESERCIZIO Verificare che w_1, v sono lin. indipendenti



Cerchiamo $a \in \mathbb{R}$ tale che

$v + a w_1 \perp_{st} w_1$ cioè

$\langle v + a w_1, w_1 \rangle_{st} = 0 \Longrightarrow$ SPIEG.

$$\langle v, w_1 \rangle_{st} + a \overbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}^{=1} = 0 \qquad a = -\langle v, w_1 \rangle_{st}$$

$$\left.\begin{cases} v' \overset{def}{=} v - \langle v, w_1 \rangle w_1 & v' \perp w_1 \\ w_2 \overset{def}{=} \frac{v'}{\|v'\|} \text{ è un versore} \end{cases}\right\} \Longrightarrow \underline{w_2 \perp w_1}$$

↳ v appartiene al sottospazio generato da w_1, w_2

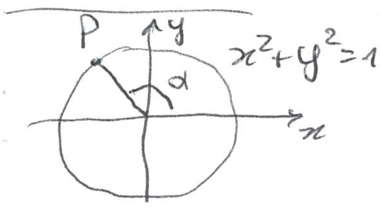
Allora anche $\frac{v}{\|v\|} = \alpha w_1 + \beta w_2$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ opportuni da determinare.

$$1 = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| \Longrightarrow 1 = \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle_{st} = \langle \alpha w_1 + \beta w_2, \alpha w_1 + \beta w_2 \rangle_{st} =$$

$$= \alpha^2 \underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}_{=1} + \alpha\beta \underbrace{\langle w_1, w_2 \rangle}_{=0} + \beta\alpha \underbrace{\langle w_2, w_1 \rangle}_{=0} + \beta^2 \underbrace{\langle w_2, w_2 \rangle}_{=1} = \alpha^2 + \beta^2$$

Questo conto ci è venuto facile perché

- w_1, w_2 sono entrambi versori
- $w_1 \perp w_2$



$P(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ dunque

$$\frac{v}{\|v\|} = \cos(\alpha) w_1 + \operatorname{sen}(\alpha) w_2$$

Infine

$$\langle u, v\rangle_{st} = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle_{st} = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\langle w_1, \cos(\alpha) w_1 + \operatorname{sen}(\alpha) w_2\rangle_{st}$$

$$= \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos(\alpha)\underbrace{\langle w_1, w_1\rangle_{st}}_{=1} + \|u\|\cdot\|v\|\operatorname{sen}(\alpha)\underbrace{\langle w_1, w_2\rangle_{st}}_{=0}$$

$$\boxed{\langle u, v\rangle_{st} = \|u\|\cdot\|v\|\cos(\alpha)}$$

Da questa segue subito che, se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ allora $\langle u, v\rangle_{st} < 0$. Non c'è nessuna contraddizione con la proprietà di essere definito positivo.

ESEMPIO 1 (continuazione)

$\mathbb{R}^2$ è dotato del prodotto scalare φ.

Cerco una base di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale φ abbia un'espressione più semplice.

$\varphi(e_1, e_1) = 2 \Rightarrow \|e_1\|_\varphi = \sqrt{2}$ $\quad v_1 \overset{def.}{=} \frac{e_1}{\sqrt{2}}$ è versore risp. φ

Cerchiamo $a \in \mathbb{R}$ tale che $\quad a v_1 + e_2 \perp_\varphi e_1$

$$a v_1 + e_2 = a\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{a}{\sqrt{2}}\\ 1\end{vmatrix}$$

impongo!

$$0 = \varphi(a v_1 + e_2, e_1) = \begin{bmatrix}\frac{a}{\sqrt{2}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{a}{\sqrt{2}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix} = \frac{2a}{\sqrt{2}} + 2$$

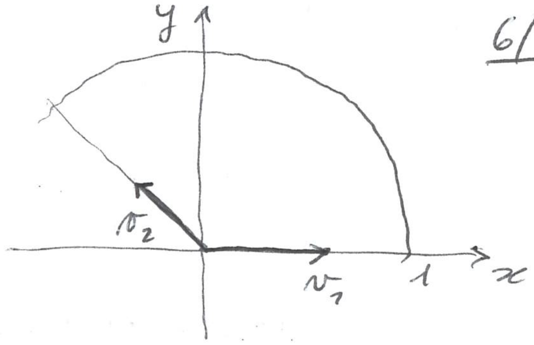
$\underline{a = -\sqrt{2}}$

$$-\sqrt{2}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1\\ 1\end{vmatrix} = u$$

$$\varphi(u, u) = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = 3$$

$\|u\|_\varphi = \sqrt{3}$ $\qquad v_2 \overset{def}{=} \frac{u}{\sqrt{3}}$

$v_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad v_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$



v_1, v_2 è una base di $\mathbb{R}^2$ $\qquad \mathscr{C} = (v_1, v_2)$

$a v_1 + a' v_2$, $b v_1 + b' v_2 \in \mathbb{R}^2$ arbitrari $\quad a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

$\varphi(a v_1 + a' v_2, b v_1 + b' v_2) = \ldots\ldots =$

$= ab \underbrace{\varphi(v_1, v_1)}_{=1} + ab' \underbrace{\varphi(v_1, v_2)}_{=0} + a'b \underbrace{\varphi(v_2, v_1)}_{=0} + a'b' \underbrace{\varphi(v_2, v_2)}_{=1}$

$= ab + a'b'$ facile come con il prodotto scalare standard!

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \end{array} \qquad P = M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}_1}(id)$$

è una matrice di cambiamento di base

Il significato di questo calcolo è che la matrice è che rappresenta φ rispetto alla base ordinata $\mathscr{C}$ è

$$\begin{bmatrix} \varphi(v_1, v_1) & \varphi(v_1, v_2) \\ \varphi(v_2, v_1) & \varphi(v_2, v_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Quali sono i rapporti tra P, M ed I_2?

Siano $u, v \in \mathbb{R}^2$ arbitrari. Allora

$u = \alpha v_1 + \beta v_2 = x e_1 + y e_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ $\qquad$ Analogamente

$v = \alpha' v_1 + \beta' v_2 = x' e_1 + y' e_2 = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$

$$\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} M P \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} \overset{\text{SPIEG.}}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} {}^tP}\, M P \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$$

Ma vale anche $\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} I_2 \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$

<u>ESERCIZIO</u> Verificare che ${}^tPMP = I_2$

Verificare anche che P è una matrice invertibile.

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; $\langle\, ,\rangle$ prodotto scalare su V $\quad \langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. PISTOLOTTO

$E \subset V$ sottoinsieme.

$$E^\perp \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in E \}$$

$E^\perp$ è un <u>sottospazio vettoriale</u> di V

<u>Dim.</u>

$\langle 0_V, w \rangle = 0 \quad \forall w \in E \implies$ <u>$0_V \in E^\perp$</u>

Se $v, v' \in E^\perp$ allora $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle = 0 + 0 = 0$ $\forall w \in E \implies v + v' \in E^\perp$

Se $v \in E^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ sono arbitrari, allora $\forall w \in E$

$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \implies \lambda v \in E^\perp$. ∎

In particolare, ci interesserà il caso in cui $E = W$ è un sottospazio vettoriale di V.
In tal caso sarà importante trovare una relazione tra $\dim(W)$ e $\dim(W^\perp)$.