ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 4

Trieste, 6 novembre 2017

1. Si consideri il sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 & = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 & = 3. \end{cases}$$

Scrivere la matrice A dei coefficienti e la matrice completa A'. Applicare l'algoritmo di Gauss per trasformarle in matrici a gradini, indicando i gradini e i pivot. Scrivere poi il nuovo sistema lineare a gradini, indicare i parametri liberi, trovare lo spazio delle soluzioni W del sistema omogeneo associato, una base di W e una soluzione particolare del sistema generale.

2. Applicare l'algoritmo di Gauss al seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 8 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 & = b \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 2. \end{cases}$$

Indicare i pivot, dire per quali valori di b il sistema è compatibile, determinare la dimensione dello spazio W delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, e $v_1, \dots, v_n$ una una base di V. Dimostrare che

(i) f è iniettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti;

(ii) f è suriettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano W.

4. Siano V, W K-spazi vettoriali di dimensione finita, $f : V \to W$ un'applicazione lineare.

Dimostrare che, se f è iniettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = id_V$, mentre se f è suriettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = id_W$. (Suggerimento: usare i teoremi di completamento a una base e della determinazione di un'applicazione lineare.)