LEZIONE 26 7/11/17 1

V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$

$\langle\, , \,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare fissato.

$(V, \langle -,- \rangle)$: SP. VETT. EUCLIDEO

PROPOSIZIONE

$v_1, \dots, v_t \in V$ tali che $v_i \neq 0_V \ \forall i$ e $i \neq j \Rightarrow v_i \perp v_j$.

Allora $v_1, \dots, v_t$ sono linearmente indipendenti.

Dim.

Siano $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{R}$ tali che

(1) $$a_1 v_1 + \dots + a_t v_t = 0_V$$

è da provare che tutti gli scalari $a_1, \dots, a_t$ sono $= 0_{\mathbb{R}}$

Verifichiamolo per a_1:

$$0_{\mathbb{R}} = \langle 0_V, v_1 \rangle \overset{(1)}{=} \langle a_1 v_1 + \dots + a_t v_t, v_1 \rangle =$$

lin di $\langle -,- \rangle$ risp. 1° argomento

$$= a_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{>0} + a_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + a_t \underbrace{\langle v_t, v_1 \rangle}_{=0}$$

per le ipotesi

SPIEG.

Quindi:

$$a_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{>0} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \Longrightarrow a_1 = 0$$

Analogamente si verifica "un colpo alla volta" che $a_2 = 0, \dots, a_t = 0$. ∎

Def. Una base di V è detta ortogonale se è formata da vettori a due a due ortogonali. È detta ORTONORMALE (ON) se, inoltre, è formata tutta da versori. Dunque

$v_1, \dots, v_n$ è base ON di V $\Longleftrightarrow$

- $\|v_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $i \neq j \Longrightarrow v_i \perp v_j \quad (\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0)$

Esistono basi ON per V? SI! 7/11/17

<u>Notazione</u> V sp. vett. qualsiasi $v_1, \dots, v_r \in V$ qualsiasi. Indicheremo con $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)$ il sottospazio di V <u>generato</u> da $v_1, \dots, v_r$.

PROCEDIMENTO DI ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

Siano $v_1, \dots, v_t$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale euclideo V ($\langle \, , \rangle$ si sottointende). Allora esistono dei <u>versori</u> $u_1, \dots, u_t$ a due a due <u>ortogonali</u>, e tali che

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r) = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_r) \qquad \forall r = 1, \dots, t.$$

<u>Dim.</u> Si descrive un <u>algoritmo</u>:

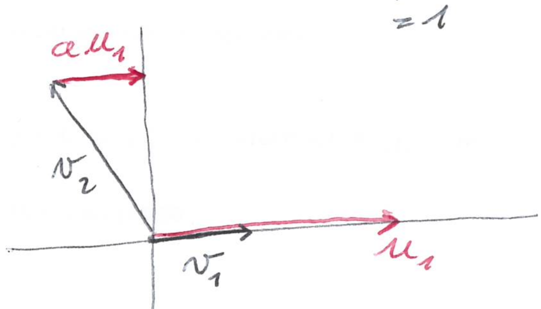
- $u_1 \overset{def}{=} \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ è un versore.

- cerco $a \in \mathbb{R}$ t.c. $v_2 + a u_1 \perp u_1 \iff$

$$\langle v_2 + a u_1, u_1 \rangle = 0 \iff \langle v_2, u_1 \rangle + a \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} = 0$$

$$a = -\langle v_2, u_1 \rangle$$

$$w \overset{def}{=} v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$



- $w \neq 0$ perché altrimenti v_2, u_1 lin. dip. $\Rightarrow$ $\Rightarrow v_2, v_1$ lin. dip. <u>SPIEGARE</u>, assurdo.

- $\mathrm{Span}(u_1, w) = \mathrm{Span}(u_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

$u_2 \overset{def}{=} \dfrac{w}{\|w\|}$ versore $\quad u_1 \perp u_2 \quad \mathrm{Span}(u_1, u_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

- cerco $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underbrace{v_3 + a_1 u_1 + a_2 u_2 \perp u_1}_{\Updownarrow} \quad e \quad v_3 + a_1 u_1 + a_2 u_2 \perp u_2$$

$$0 = \langle v_3 + a_1 u_1 + a_2 u_2 , u_1 \rangle =$$

$$= \langle v_3 , u_1 \rangle + a_1 \underbrace{\langle u_1 , u_1 \rangle}_{=1} + a_2 \underbrace{\langle u_2 , u_1 \rangle}_{=0} \Longrightarrow \underline{a_1 = - \langle v_3 , u_1 \rangle}$$

Analogamente, partendo dall'altra condizione si trova

$a_2 = - \langle v_3 , u_2 \rangle$ $\boxed{w' \overset{def}{=} v_3 - \langle v_3 , u_1 \rangle u_1 - \langle v_3 , u_2 \rangle u_2}$

$w' \neq 0$ perché altrimenti v_3, u_1, u_2 sarebbero lin. dipendenti $\Longrightarrow$ v_3, v_1, v_2 lin. dip, assurdo.

$u_3 \overset{def}{=} \dfrac{w'}{\| w' \|}$ è un <u>versore</u>.

Per costruzione: $\underline{u_3 \perp u_1}$, $\underline{u_3 \perp u_2}$ ($\underline{u_1 \perp u_2}$ lo sappiamo già)

Infine: $Span(u_1, u_2, u_3) \overset{\text{SPIEG.}}{=} Span(u_1, u_2, w') =$

$= Span(u_1, u_2, v_3) = Span(v_1, v_2, v_3)$

E così via. ■

INSERIRE pag. 9 della LEZIONE di IERI

Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale $\dim(W) = r$ (e $\dim(V) = n$). Allora

$$\dim(W^\perp) = n - r$$

Dim.

Sia $v_1, \ldots, v_r$ una base di W.

La completiamo ad una base di V: $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$.
Applichiamo il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt a tale lista di vettori; otteniamo

$u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n \in V$ tutti versori

$i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$. Inoltre

$\mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_r) = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_r) = W$

e $u_1, \ldots, u_n$ è una base di V. (*)

Se $w \in W$ è arbitrario, allora $w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r$.
Per ogni $j > r$ si ha, allora

$\langle w, u_j \rangle = \langle \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r, u_j \rangle =$

$$= \lambda_1 \underbrace{\langle u_1, u_j \rangle}_{=0} + \ldots + \lambda_r \underbrace{\langle u_r, u_j \rangle}_{=0} = 0$$

Dunque $\underline{u_{r+1}, \ldots, u_n \in W^\perp}$. In particolare, ne segue

$$\mathrm{Span}(u_{r+1}, \ldots, u_n) \subset W^\perp$$

NB

Viceversa, sia $t \in W^\perp$ $\quad t = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_n u_n$

per (*)

Allora, per ogni $h \leq r$ si ha, in particolare:

$u_h \in W \Longrightarrow 0 = \langle u_h, w \rangle = \langle u_h, \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_n u_n \rangle =$

$$= \mu_1 \underbrace{\langle u_h, u_1 \rangle}_{=0} + \ldots + \mu_h \underbrace{\langle u_h, u_h \rangle}_{=1} + \ldots \mu_n \underbrace{\langle u_h, u_n \rangle}_{=0}$$

$\Rightarrow \mu_h = 0$. Ma allora $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$, cioè

$t = \mu_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \mu_n u_n \Rightarrow t \in \mathrm{Span}(u_{r+1}, \ldots, u_n)$

Infine $W^\perp = \mathrm{Span}(u_{r+1}, \ldots, u_n)$. Poiché $u_{r+1}, \ldots, u_n$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base di $W^\perp$.

■

DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARZ

$(V, \langle -, - \rangle)$ spazio vettoriale euclideo.

$u, v \in V$ qualsiasi $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ qualsiasi

$$0 \leq \langle \lambda u - v, \lambda u - v \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle - \langle \lambda u, v \rangle - \langle v, \lambda u \rangle + \langle v, v \rangle =$$

abbiamo usato anche la pr. simm. $\quad = \lambda^2 \langle u, u \rangle - 2\lambda \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$

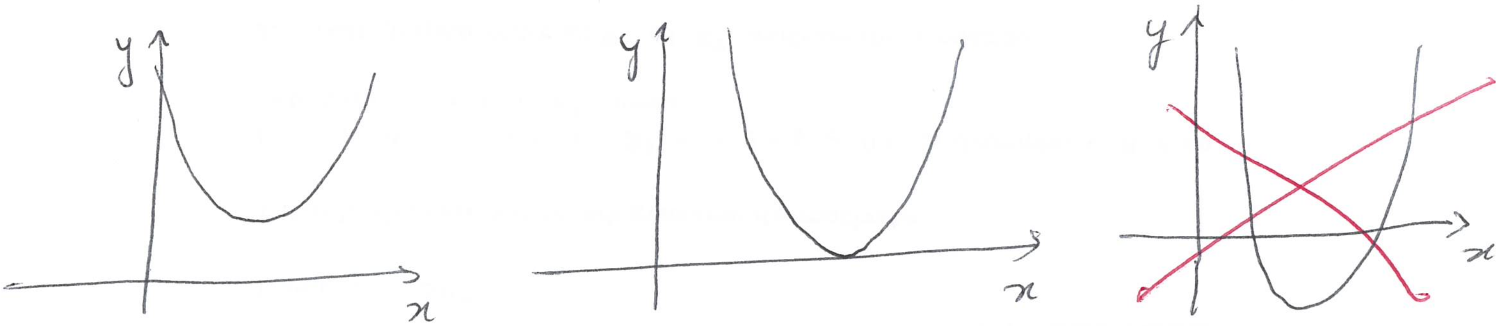
Riassumendo

(1) $\quad \langle u, u \rangle \lambda^2 - 2 \langle u, v \rangle \lambda + \langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Supponiamo $u \neq 0_V$, dunque $\langle u, u \rangle > 0$

$y = \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\in \mathbb{R}} x^2 \underbrace{- 2 \langle u, v \rangle}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\in \mathbb{R}}$ è l'eq. di una parabola

sono fissati



La (1) ci dice che tale parabola può incontrare l'asse x al più in un punto (nel suo vertice)

Questo equivale a dire che l'equazione

$$\langle u, u \rangle x^2 - 2 \langle u, v \rangle x + \langle v, v \rangle = 0$$

non può avere due radici (reali) distinte

Ma, allora, necessariamente

$\frac{\Delta}{4} \le 0$ cioè $\langle u,v\rangle^2 - \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \le 0$

$\langle u,v\rangle^2 \le \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$ estraggo da entrambi i membri la $\sqrt{\ }$:

(2) $\boxed{|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|}$ è la disug. di C-S

SPIEG. il "$|\_|$"   Se $u=0$ è vera banalmente

Quando vale "=" in (2)?
Si può verificare che questo accade $\Leftrightarrow$ u, v sono linearmente dipendenti (ESERCIZIO).

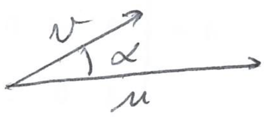
~o~

Sia $u \neq 0$, $v \neq 0$. Allora posso riscrivere (2) così:

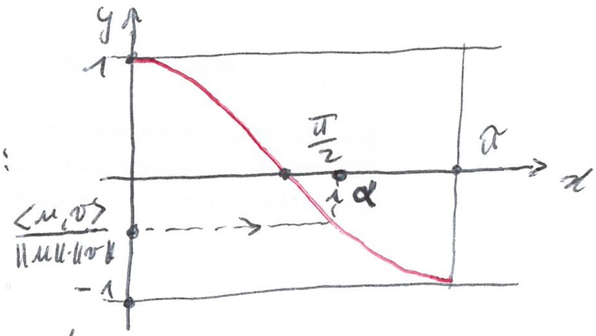
$$-1 \le \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \le +1$$

Ieri abbiamo visto nel caso di $\langle\ ,\ \rangle_{st}$ di $\mathbb{R}^3$ che

$$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \cos(\alpha)$$



Il grafico della funzione $y=\cos(x)$ per $0 \le x \le \pi$ è:



È possibile definire tale funzione senza alcun riferimento ad angoli, mediante la formula

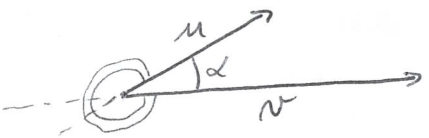
(*) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ SPIEG.

$2! = 2\cdot 1$ $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ ecc.

La restrizione a $[0,\pi]$ di $\cos(x)$ è iniettiva, ed ha per immagine $[-1,1]$. Quindi, per ogni $\bar{y} \in [-1,1]$ esiste ed è unico un $\bar{x} \in [0,\pi]$ tale che $\cos(\bar{x}) = \bar{y}$.

Queste proprietà si possono dimostrare anche a partire dalla formula (*). Quindi si può associare alla coppia di vettori non nulli u, v l'angolo convesso α che formano tra loro SPIEGARE

che non contiene il prolungamento dei lati.



ha lo stesso cos di α
ma è > π

$$\|u-v\| = ?$$

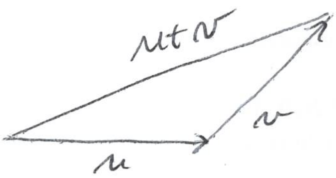
$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle =$$

$$= \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$\Longrightarrow \boxed{\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\cdot\|v\|\cos(\alpha)}$$ TEOREMA del COSENO (o di CARNOT)

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (il triangolo di lati $u, v, u-v$ è rettangolo e u, v sono i cateti):

$$\boxed{\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2}$$ TEOREMA di PITAGORA



$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \le$$

$$\le \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 \underset{C.S.}{\le}$$

$$\le \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|}$$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE