

ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 4 BIS

Trieste, 6 novembre 2017

Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $f : W_1 \times W_2 \rightarrow V$ l'applicazione definita da $f(w_1, w_2) = w_1 + w_2$ (dove $W_1 \times W_2$ denota il prodotto definito nel foglio 3).

- (i) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.
- (ii) Determinare l'immagine di f : qual è la sua dimensione?
- (iii) Descrivere gli elementi del nucleo di f ricordando che $\text{Ker} f \subset W_1 \times W_2$. Costruire una base per $\text{Ker} f$, a partire da una base di $W_1 \cap W_2$. Calcolare la dimensione di $\text{Ker} f$.
- (iv) Dare una dimostrazione della relazione di Grassmann come conseguenza del teorema della dimensione per l'applicazione f appena considerata.