Esercizi Geometria 3A

8/11/2017

1. Siano $a, b, c \neq 0$. Trovare una parametrizzazione dell'ellissoide di equazione cartesiana:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
Descrivere geometricamente le curve $u = cost$ sull'ellissoide.

2. Trovare l'equazione del piano tangente a ciascuna superficie parametrizzata nel punto indicato
   a. $\sigma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$, $P = (1,1,0)$.
   b. $\sigma(r,\theta) = (\, r\cosh\theta\,, r\sinh\theta\,, r^2)$, $P = (1,0,1)$.
   c. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nei punti $(x, y, 0)$.

3. Scrivere una parametrizzazione dell'iperboloide a 2 falde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$. Dimostrare che ciascuna delle due falde è diffeomorfa ad un piano, i.e. $\{(x,y,z) \in S; z > 0\}$ è diffeomorfa al piano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.

4. Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x^2 + z^2 + x - y = 0$. Verificare che S è una superficie regolare, che il punto $P = (1,3,1)$ appartiene a S e trovare una carta locale regolare di S nel punto P. Scrivere l'equazione del piano tangente a S in P e determinare la sua intersezione con S.

5. Sia γ una curva biregolare parametrizzata in lunghezza d'arco in $\mathbb{R}^3$. Il *tubo* di raggio $a > 0$ attorno a γ è una superficie parametrizzata da
$$\sigma(s,\theta) = \gamma(s) + a(n(s)\cos\theta\ + b(s)\sin\theta),$$
dove n la normale di γ e b è la binormale.
Dare una descrizione geometrica di questa superficie. Dimostrare che σ è regolare se la curvatura k di γ è minore di a^{-1} ovunque. Mostrare infine che, quando σ è regolare, la normale alla superficie è data da
$$N(s,v) = -(n(s)\cos v + b(s)\sin v).$$

Si noti che, anche se σ è regolare, la superficie σ avrà delle autointersezioni se γ arriva ad una distanza di $2a$ da sé stessa. Per ottenere anche iniettività della parametrizzazione σ bisogna restringere (s, θ) ad un intorno aperto U di $\mathbb{R}^2$ sufficientemente piccolo.

6. Sia $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$. Individuare i punti critici e i valori critici di f. Per quali valori di c l'insieme $f(x, y, z) = c$ è una superficie regolare?

7. Sia Σ una superficie regolare con equazioni cartesiane $z = f\left(\frac{x}{y}\right)x,\ x \neq 0$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Dimostrare che tutti i piani tangenti a Σ passano per l'origine.