V sp. vett. $/\mathbb{R}$ $\quad \langle\ ,\ \rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ prod. scalare

$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ base ordinata di V.

$u, w \in V \qquad u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \qquad w = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n$

$$\langle u, w\rangle = \langle a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n, w\rangle = a_1\langle v_1, w\rangle + \ldots + a_n\langle v_n, w\rangle =$$

$$= a_1\langle v_1, b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n\rangle + \ldots = a_1 b_1 \langle v_1, v_1\rangle + \ldots + a_1 b_n\langle v_1, v_n\rangle + \ldots$$

$M = [m_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \qquad m_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ $\quad$ BASTA conoscere questi $\quad$ SPIEG.

$$\langle u, w\rangle = [a_1 \ldots a_n]\, M \begin{bmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$$ prodotto R×C

M è detta anche matr. di Gram.

$\underline{\det(M) = ?}$

Applico il procedimento di ON di Gram-Schmidt a $v_1, \ldots, v_n$. Trovo la base ON $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ di V

$$P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ & & \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \\ u_1 \ \ldots\ u_n \end{array}$$

$\underline{P \text{ è invertibile}}$

il significato di P è questo: $u \in V$ arbitrario

$u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n =$

$= c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$

Allora
$$\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix}$$

Analogamente, se $w = d_1 u_1 + \ldots + d_n u_n$ allora
$$\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots \\ d_n\end{bmatrix}$$

Ora
$$\langle u, w\rangle = [a_1 \ldots a_n]\, M\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix} = {}^t\!\left(P\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix}\right) M P\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots \\ d_n\end{bmatrix} = {}^t\!\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix}\, {}^tPMP\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots \\ d_n\end{bmatrix} =$$

$$= [c_1 \ldots c_n]\, {}^tPMP\begin{bmatrix} d_1\\ \vdots \\ d_n\end{bmatrix}$$

Dunque ${}^tPMP$ è la matrice che rappresenta $\langle\ ,\ \rangle$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.

Ma $\mathcal{C}$ è base ON di V, risp. $\langle\ ,\ \rangle$. ← COMMENTARE

Dunque ${}^tPMP = I_n$. Allora per il teorema di Binet:

$$1 = \det(I_n) = \det({}^tPMP) = \det({}^tP)\det(M)\det(P) = \det(P)^2\det(M)$$

$$1 = \underbrace{\det(P)^2}_{\geq 0}\det(M) \qquad (\text{NB } P \text{ è invertibile} \Rightarrow \det(P) \neq 0)$$

Dunque $\boxed{\det(M) = \dfrac{1}{\det(P)^2} > 0}$

$V \xrightarrow[\sim]{K_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^n$ $\quad u, w \in V \quad K_{\mathcal{B}}(u) = U \quad K_{\mathcal{B}}(v) = W$

$\langle\ ,\ \rangle \qquad ? \qquad$ U, W sono matrici $n\times 1$

$\langle u, w\rangle = {}^tUMW \quad (r\times c)$

$t \in V \quad \underline{t \neq 0} \quad T = \{\lambda t \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset V$ sottospazio vett. $\dim(T) = 1$

$t = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$T^{\perp} \overset{def}{=} \{v \in V \mid \langle v, \lambda t\rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\langle v, \lambda t\rangle = \lambda\langle v, t\rangle = 0 \overset{se\ \lambda \neq 0}{\Longleftrightarrow} \langle v, t\rangle = 0$

Mi conviene "tradurre" tutto in $\mathbb{R}^n$ e calcolare in $\mathbb{R}^n$

v è un vettore incognito, cioè "da trovare"

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \qquad x_1, \dots, x_n$ scalari incogniti

$\langle v, t\rangle = [x_1 \ \dots \ x_n]\, \underbrace{M\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}} = 0 \qquad M\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$ è una matrice $n\times\cancel{n}\ \cancel{n}\times 1$

Considero $L_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è lineare.

$\det(M) \neq 0 \Rightarrow M$ è invertibile $\Rightarrow \underline{L_M \text{ è isomorfismo}}$

$t \neq 0_V \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow M\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix} \underset{def}{=} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n\end{bmatrix} \neq 0$

8/11/17 (3

Allora $\langle v, t\rangle = 0 \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = K_{\mathcal{B}}(v)$ è

una soluzione del SL omogeneo $\overset{(*)}{\vee}\ \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = 0$

un'equazione in n incognite. Per quanto visto sopra, la sua matrice dei coeff. $[\beta_1 \dots \beta_n] \neq [0 \dots 0]$ dunque ha rango 1. Dunque, il sottospazio vett. di $\mathbb{R}^n$ dato da tutte le soluzioni di $(*)$ ha dimensione

$\#$ indeterm $- rg(A) = \underline{n-1}$ $\qquad \underline{\dim(T^\perp) = n-1}$

$T \subset V$ sottosp. vett. di $\dim(T) = r$

$t_1, \dots, t_r$ sia una base di T.

Se $v \in T^\perp$ allora $\langle v, t_h\rangle = 0 \quad \forall h = 1, \dots, r$ per def di $T^\perp$.

Viceversa, sia $v \in V$ tale che $\langle v, t_h\rangle = 0 \quad \forall h = 1, \dots, r$.

Un qualsiasi elemento w di T si può scrivere come $w = a_1 t_1 + \dots + a_r t_r$. Allora

per ip.

$$\langle v, w\rangle = \langle v, a_1 t_1 + \dots + a_r t_r\rangle \underset{\text{BILIN}}{=} \underbrace{a_1 \overbrace{\langle v, t_1\rangle}^{=0} + \dots + a_r \overbrace{\langle v, t_r\rangle}^{=0}}_{=0}$$

Dunque $\forall w \in T$ si ha $\langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow \underline{v \in T^\perp}$

Abbiamo visto che ciascuna condizione $\langle v, t_h\rangle = 0$ si traduce in $\mathbb{R}^n$ in un'equazione lineare

$\beta_{h1} x_1 + \dots + \beta_{hn} x_n = 0$ dove, se $t_h = b_{h1} v_1 + \dots + b_{hn} v_n$

allora $\begin{bmatrix} \beta_{h1} \\ \vdots \\ \beta_{hn} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} b_{h1} \\ \vdots \\ b_{hn} \end{bmatrix}$

Un punto interessante è questo

$t_1, \dots, t_r$ lin. indip. in V $\Rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} b_{r1} \\ \vdots \\ b_{rn} \end{bmatrix}$ sono lin. indip. in $\mathbb{R}^n$ perché $K_{\mathcal{B}}$ è isomorfismo SPIEG.

Da questo segue poi che

$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{1n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \beta_{r1} \\ \vdots \\ \beta_{rn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti perché L_α è isomorfismo.

<u>Riassumendo</u>:
i vettori del sottospazio vett. $T^\perp$ di V sono tutti e soli quelli le cui coordinate risp. alla base $\mathcal{B}$ sono una soluzione del sistema lineare <u>omogeneo</u>:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rn} \end{bmatrix}}_{B \text{ per brevità}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad r \text{ equazioni in } n \text{ incognite} \quad (\ast\ast)$$

Per quanto detto sopra: $\underline{rg(B) = r}$. Allora

$\underline{\dim(T^\perp)} = \dim(\text{spazio delle soluz. di } (\ast\ast)) =$

$= \#\text{ indeterminate} - rg(B) = \underline{n - r}$

PRODOTTO VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle_{st}$ ← in questo argomento

Vogliamo associare a due qualsiasi vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$ un opportuno <u>vettore</u> di $\mathbb{R}^3$ che indicheremo con <u>$u \wedge v$</u> (talvolta si trova anche <u>$u \times v$</u>): il <u>prodotto vettoriale</u> di u, v COMMENTI

<u>Supp.</u>, innanzitutto, u, v lin. indipendenti.

$W = \mathrm{Span}(u, v)$, $\dim(W) = 2 \implies \dim(W^\perp) = 3 - 2 = 1$

Sia $g \in W^\perp$ tale che valgono le seguenti condizioni:

$\|g\| = 1$ (g è un versore risp $\langle , \rangle_{st}$) e

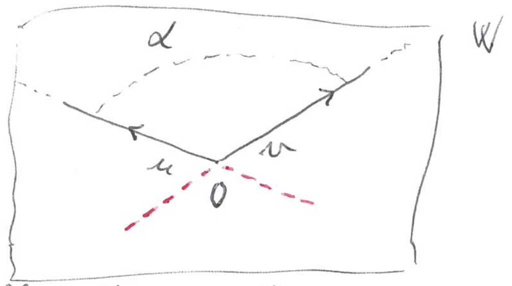
SPIEG.

$$\underbrace{\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & g \end{array} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & g_1 \\ u_2 & v_2 & g_2 \\ u_3 & v_3 & g_3 \end{vmatrix} \end{array} > 0}$$

solo due elementi di $W^\perp$ verificano questa condizione, perché $\dim(W) = 1$

Cerchiamo di capire il significato di questa condizione.

Pensiamo W come un piano.
Allora $\{\lambda u \mid \lambda \geq 0\}$ e $\{\mu v \mid \mu \geq 0\}$ sono due semirette in tale piano, con la stessa origine O (il vettore nullo).



Queste semirette non sono contenute nella stessa retta perché u, v sono lin. indip.

Le semirette suddividono il piano W in due angoli con gli stessi lati.
Uno di questi angoli contiene il prolungamento dei lati (a. concavo), l'altro no (<u>angolo convesso</u>). Noi siamo interessati a questo secondo angolo. Sia α la sua ampiezza (in radianti)

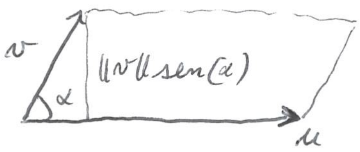
REGOLA della MANO DESTRA

Il verso di g è quello "piedi-testa" di un osservatore che, posto su W, vede la rotazione di u su v attraverso l'angolo convesso avvenire in senso <u>antiorario</u>.

$\boxed{u \wedge v \overset{def.}{=} \underbrace{\|u\|\cdot\|v\|\,\mathrm{sen}(\alpha)}_{\in \mathbb{R}}\, g}$ $\qquad u, v$ lin. dip. : $u \wedge v \overset{def}{=} \underline{0} \in \mathbb{R}^3$

$0 < \alpha < \pi \Rightarrow \mathrm{sen}(\alpha) > 0 \Rightarrow \|u \wedge v\| \overset{\|g\|=1}{=} \|u\|\cdot\|v\|\,\mathrm{sen}(\alpha)$

Osserviamo che $\|u \wedge v\|$ è l'area del parallelogramma di lati u, v



Riassumendo

$u \wedge v = 0 \iff u, v$ sono linearmente dipendenti

Altrimenti $u \wedge v$ ha

- direzione ortogonale sia ad u che a v
- verso "piedi - testa" di un osservatore ---
- modulo uguale all'area del parallelogramma di lati u, v

} queste condiz. permettono di usare $u \wedge v$ in Fisica.

Vale $\boxed{u \wedge v = - v \wedge u}$

ESEMPIO e_1, e_2, e_3 : base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora

$\boxed{e_1 \wedge e_2 = e_3}$ $\quad \boxed{e_1 \wedge e_3 = -e_2}$ $\quad \boxed{e_2 \wedge e_3 = e_1}$

ESEMPIO

$e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2 \qquad (e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 = \underline{0} \wedge e_2 = \underline{0}$

Dunque il prodotto vettoriale non è associativo.

~ o ~

$\mathrm{Span}(u)^\perp$ ha equazione $|u_1 \ u_2 \ u_3| \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$ se $u = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}$

cioè $\begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \end{cases}$ (*)

$\mathrm{Span}(v)^\perp$ ha equazione

u, v lin. indip. $\iff rg \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 2$

In tal caso le sol. di (*) sono lo span di :

1) $\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \overset{def}{=} \pi \qquad \underline{\pi \neq 0}$

Studiamo il vettore $\bar{u}$:

- $\bar{u} \perp u$ e $\bar{u} \perp v$. Infatti

$$\langle \bar{u}, u\rangle_{st} = \det\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

[regola di Laplace applicata all'ultima riga

Analogamente si vede che $\langle \bar{u}, v\rangle_{st} = 0$

- regola di Laplace applicata all'ultima colonna

$$\det\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_2 & v_2 & -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_3 & v_3 & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 = \|\bar{u}\|^2 > 0$$

perché $\bar{u} \neq 0 \Rightarrow \|\bar{u}\| > 0$

Quindi $\bar{u}$ ha <u>direzione</u> e <u>verso</u> uguali a quelli di $u \wedge v$.

- $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) = \|u\|^2\|v\|^2(1-\cos^2(\alpha)) =$

$$= \|u\|^2\|v\|^2 - \underbrace{\|u\|^2\|v\|^2\cos^2(\alpha)}_{=\langle u,v\rangle_{st}^2} = (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2$$

$= \text{conti} = \langle \bar{u}, \bar{u}\rangle_{st} = \|\bar{u}\|^2$

Dunque si ha anche $\|\bar{u}\| = \|u \wedge v\|$. Pertanto $\underline{\bar{u} = u \wedge v}$

Quindi la (1) fornisce $u \wedge v$ in coordinate.
Se u, v sono linearmente dipendenti, la (1) fornisce il vettore nullo, quindi funziona anche in questo caso.

~o~

Con un po' di conti dalla (1) segue che <u>$\wedge$ è bilineare</u>:

$(u+u') \wedge v = u \wedge v + u' \wedge v$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (\lambda u) \wedge v = \lambda\, u \wedge v = u \wedge (\lambda v)$

e analoga.

<u>ESEMPIO</u>

$u = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ $\qquad$ analogamente $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$

$u_i, v_j \in \mathbb{R} \quad \forall i, \forall j$

$$u \wedge v = (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) =$$

$$= u_1 v_1 \underbrace{e_1 \wedge e_1}_{=0} + u_1 v_2 \, e_1 \wedge e_2 + \ldots + u_2 v_1 \underbrace{e_2 \wedge e_1}_{=-e_1 \wedge e_2} + \ldots =$$

$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \underbrace{e_1 \wedge e_2}_{=e_3} + \ldots = \left(\ldots, \ldots, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

<u>Prodotto misto</u> di $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

Sviluppiamo il determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

con la regola di Laplace secondo la terza riga, oppure la prima riga. Otteniamo

$$\boxed{\langle u \wedge v, w \rangle = \langle u, v \wedge w \rangle}$$

Si noti che l'<u>ordine</u> dei tre vettori nei due membri è lo stesso.

<u>prodotto misto di u, v, w</u>

SPIEG.

Un calcolo a pag. 3 mostra che

$$\|u \wedge v\|^2 = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \|v\|^2 \end{vmatrix}$$