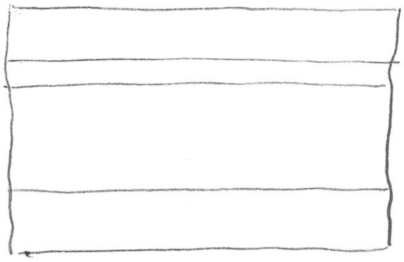
LEZIONE 28 — 9/11/17 — ①

COMPLEMENTO alla lezione di ieri

A matrice $m \times n$ $rg(A) = r$

Allora esistono r righe di A linearmente indipendenti tra loro, e non di più.

A



queste r righe possono essere "sparpagliate"

(in generale queste r righe non sono uniche; cioè ci sono altre scelte possibili di r righe che funzionano.

ESEMPIO

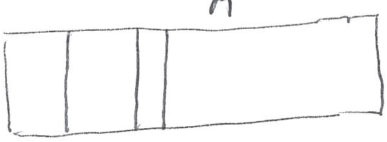
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

due righe qualsiasi di questa matrice sono lin. indip.)

Quindi dentro A ho una sottomatrice A' $r \times n$, le cui r righe sono lin. indip.: $rg(A') = r$.

Ma allora esistono r colonne di A' linearmente indipendenti

A'



$r \times n$

Con queste r colonne di A' faccio una matrice $r \times r$: B

$rg(B) = r$ perché le r colonne di B sono lin. indip.

(La matrice B si chiama anche un minore $r \times r$ di A)

$\Rightarrow \det(B) \neq 0$ (lo abbiamo dim. qualche lezione fa).

Nel caso nostro avevamo una matrice 2×3 di rango 2:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Quindi esistono due colonne di questa che sono lin. indipendenti

Supponiamo siano le prime due. Allora

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

ESEMPIO/ESERCIZIO

$$v = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad v \neq 0 \qquad T = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ sottosp. vett.}$$

$$T^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, \lambda v\rangle_{st} = 0 \quad \forall \lambda \neq 0\} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v\rangle_{st} = 0\}$$

$$u = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad \langle u, v\rangle_{st} = \begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad x + 2y + 3z = 0$$

Una particolare soluzione è $u = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$v \wedge u \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & e_1 \\ 2 & -1 & e_2 \\ 3 & 0 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & e_1 \\ 2 & -1 & e_2 \\ 3 & 0 & e_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{matrix} = -e_3 + 6e_2 + 3e_1 - 4e_3$$

$$\langle u, u\rangle_{st} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = 5 \qquad \|u\| = \sqrt{5}$$

$$\langle v, v\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 9 = 14 \qquad \|v\| = \sqrt{14}$$

$$\langle v \wedge u\rangle = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{vmatrix} = 9 + 36 + 25 = 70 \qquad \|v \wedge u\| = \sqrt{70} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{14} \cdot \overset{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1}$$

$$u_1 = \frac{v}{\|v\|} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} \qquad u_2 = \frac{u}{\|u\|} = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad u_3 = \frac{v \wedge u}{\|v \wedge u\|} = \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \\ -\frac{5}{\sqrt{70}} \end{vmatrix}$$

Sono una base ON di $\mathbb{R}^3$

$$A \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{70}} \end{vmatrix}$$

Le colonne di A sono rispettivamente u_1, u_2, u_3.

$\det(A) = ?$ Lo calcolo con lo sviluppo di Laplace risp. el.ti della 3ª colonna:

$$\det(A) = \frac{3}{\sqrt{70}} \det\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 \end{bmatrix} - \frac{6}{\sqrt{70}} \det\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 \end{bmatrix} - \frac{5}{\sqrt{70}} \det\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt5} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{9}{70} + \frac{36}{70} - \frac{5}{70}\left(-\frac{1}{70} - \frac{4}{70}\right) = \frac{45}{70} + \frac{25}{70} = \underline{1}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO del DETERMIN.

Altro fatto interessante sulla matrice A:

$\langle u_1, u_1\rangle_{st} = 1 \qquad \langle u_2, u_2\rangle_{st} = \langle u_3, u_3\rangle_{st} = 1 \qquad i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j\rangle_{st} = 0$

$${}^tA A = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & -\frac{5}{\sqrt{70}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{70}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle u_1,u_1\rangle_{st} & \langle u_1,u_2\rangle & \langle u_1,u_3\rangle \\ & \langle u_2,u_2\rangle & \\ & & \text{—} \end{vmatrix}$$

$\underline{{}^tAA = I_3}$ Poiché A è m. quadrata, da questo segue:

$\Rightarrow \det(A)\det({}^tA) = \det(A)^2 = \det(I_3) = 1$

$\Rightarrow \boxed{\det(A) = \pm 1}$

$\boxed{A^{-1} = {}^tA} \Rightarrow A\,{}^tA = I_3$ questo mi dice una cosa interessante:

(non solo le <u>colonne</u> di A formano una base ON di $\mathbb{R}^3$ risp. $\langle\, ,\, \rangle_{st}$, ma) anche le <u>righe</u> di A formano una base ON di $\mathbb{R}^3$ risp. $\langle -,- \rangle_{st}$.

Qualche controllo

$$w = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \end{vmatrix} \qquad t = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{vmatrix}$$

$$\langle w, w\rangle_{st} = \frac{1}{14} + \frac{4}{5} + \frac{9}{70} = \frac{5+56+9}{70} = \frac{70}{70} = 1$$

$$\langle t, t\rangle_{st} = \frac{4}{14} + \frac{1}{5} + \frac{36}{70} = \frac{20+14+36}{70} = \frac{70}{70}$$

$$\langle w, t\rangle_{st} = \frac{2}{14} - \frac{2}{5} + \frac{18}{70} = \frac{10-28+18}{70} = 0$$

ecc.

Proviamo a "studiare" $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

L'idea è cercare dei sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (se esistono...) tali che, se indichiamo con W uno di questi allora $L_A : W \longrightarrow \underline{\underline{W}}$ questo è il difficile: "atterrare" ancora in W.

Cerchiamo di farci la vita facile: $\dim(W) = 1$.

Allora ogni $w \in W$, $\underline{\underline{w \neq 0}}$ è base di W.

Inoltre, la condizione $L_A(W) \subset W \iff L_A(w) = \lambda w$ per qualche scalare λ. Per progredire dobbiamo "buttarsi" nei conti:

$$w = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad L_A(w) = \lambda w \text{ si traduce in } \overset{\text{prod. } r\times c}{A} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

"Buttarsi" OK, ma l'idea è di ritardare i conti veri e propri il più possibile.

$$A \underbrace{\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}} - \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}}_{\text{[la stessa]}} = O_{\mathbb{R}^3}$$

mi piacerebbe usare la propr. distributiva del prod. risp "somma"

$$\lambda \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{vmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}}^{\lambda I_3} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

Quindi

$$\underbrace{(A - \lambda I_3)}_{\text{matr. } 3\times 3} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

è un SLO 3 eq., 3 inc.

Il problema è che non conosco λ ...

Ma... voglio $\underline{\underline{w \neq 0}}$, dunque questo sistema deve (perché lo voglio io!) avere soluzioni non banali. Per questo deve essere necessariamente

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \qquad \text{calcoliamo:}$$

Sarrus

$$\det(A-\lambda I_3) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{\sqrt{14}}-\lambda & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}}-\lambda & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt5}-\lambda & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt5}-\lambda \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{70}}-\lambda & \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 \end{array}\right| =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{\sqrt5}-\lambda\right)\left(-\frac{5}{\sqrt{70}}-\lambda\right) + \frac{36}{\underbrace{\sqrt5\sqrt{70}\sqrt{14}}_{=70}} + \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{70}}\left(\frac{1}{\sqrt5}+\lambda\right) + \left(\frac{5}{\sqrt{70}}+\lambda\right)\frac{4}{\sqrt{70}}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{70}} - \frac{1}{\sqrt{14}}\lambda + \frac{1}{\sqrt5}\lambda + \lambda^2\right)\left(-\frac{5}{\sqrt{70}}-\lambda\right) + \frac{36}{70} + \frac{9}{70} + \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{70}}\lambda + \frac{20}{70} + \frac{4}{\sqrt{70}}\lambda =$$

$$= \frac{5}{70} + \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{70}}\lambda - \frac{5}{\sqrt5\sqrt{70}}\lambda - \frac{5}{\sqrt{70}}\lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{70}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{14}}\lambda^2 - \frac{1}{\sqrt5}\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{65}{70} + \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{70}}\lambda + \frac{4}{\sqrt{70}}\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \left(-\frac{5}{\sqrt{70}} + \frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt5}\right)\lambda^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{70}} - \frac{5}{\sqrt5\sqrt{70}} + \frac{1}{\sqrt{70}} + \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{70}} + \frac{4}{\sqrt{70}}\right)\lambda + 1 =$$

$$= -\lambda^3 + \left(\qquad \right)\lambda^2 + \left(\frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{70}} + \frac{5}{\sqrt{70}} - \frac{5}{\sqrt5\sqrt{70}}\right)\lambda + 1 = \boxed{\times}$$

$$\frac{14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{70}} = \frac{14}{\sqrt{14\cdot70}} = \frac{14}{\sqrt{2\cdot7\cdot7\cdot2\cdot5}} = \frac{14}{\sqrt{49}\sqrt4\sqrt5} = \frac{\cancel{14}}{\cancel{7\cdot2}\cdot\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5}$$

$$-\frac{5}{\sqrt5\sqrt{70}} = -\frac{5}{\sqrt{5\cdot70}} = -\frac{5}{\sqrt{5\cdot7\cdot5\cdot2}} = -\frac{5}{\sqrt{25}\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$\boxed{\times} = -\lambda^3 + \alpha\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0$ $\quad \alpha\in\mathbb{R}$ non ha importanza chi sia esattamente

Cerchiamo i $\lambda\in\mathbb{R}$ per cui vale

$\lambda = 1$ funziona !!!

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3+\alpha\lambda^2-\alpha\lambda+1 & -\lambda^2+(\alpha-1)\lambda-1 \\ \hline -\lambda^3+\lambda^2 & \lambda-1 \\ \hline // \quad (\alpha-1)\lambda^2-\alpha\lambda+1 & \\ \quad (\alpha-1)\lambda^2-(\alpha-1)\lambda & \end{array}$$

$\lambda^2 - (\alpha-1)\lambda + 1 = 0$ (4)

dà gli altri valori $\lambda\in\mathbb{R}$

Ma si ha $\Delta < 0$

Adesso possiamo cercare w

Basta risolvere il SLO

$$(A - I_3)\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

La matrice dei coeff. ha rango < 3 perché il suo det è zero.

Quindi basta considerare due equazioni, scelgo la prima e la terza:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{14}} - 1\right)x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{3}{\sqrt{70}}z = 0 \\ \frac{3}{\sqrt{14}}x \qquad \left(-\frac{5}{\sqrt{70}} - 1\right)z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{70}} + 1 \qquad z = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

La matrice dei coeff. ha rango $\underline{\underline{2}}$

poi si usa la prima equaz. per trovare y.

N.B. Le soluzioni di un SLO formano un sottospazio vettoriale. Nel nostro caso questo avrà dimensione $\underline{= 1}$

$$w = \begin{vmatrix} \frac{5}{\sqrt{70}} + 1 \\ --- \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{vmatrix}$$

genera un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$, con $\dim(W) = 1$, t.c. $\underline{L_A(W) = W}$

perché $L_A(w) = 1 \cdot w$

Sarebbe lo stesso se $L_A(w) = \lambda w$ con $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}$

~ o ~

L_A è un'applicazione lineare molto particolare

$L_A(e_1) = u_1 \qquad \|e_1\| = 1 = \|u_1\| \qquad \langle e_1, e_1\rangle = \langle u_1, u_1\rangle$

Analoghe proprietà per e_2 ed e_3

$L_A(e_2) = u_2 \qquad L_A(e_3) = u_3 \qquad \langle e_2, e_3\rangle = 0 \quad e \quad \langle u_2, u_3\rangle = 0$

Se questo funziona è perché la matrice A è specialissima.
Vediamo se si può sfruttare ${}^tAA = I_3$ per vedere se, presi $u, v \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi, vale

$$\langle L_A(u), L_A(v)\rangle_{st} \overset{?}{=} \langle u, v\rangle$$ oppure no

È meglio se pensiamo u, v come matrici colonna $u = B$, $v = C$ entrambe 3×1 (questo perché dobbiamo fare prodotti r×c sia per trovare l'immagine in L_A, sia per calcolare $\langle\ ,\ \rangle_{st}$.
Allora:

$$\langle L_A(u), L_A(v)\rangle_{st} = \langle L_A(B), L_A(C)\rangle_{st} = \langle AB, AC\rangle_{st} =$$
$$= {}^t(AB)AC = {}^tB({}^tAA)C = {}^tB I_3 C = {}^tBC = \langle u, v\rangle_{st} \quad !!!$$

Una prima conseguenza:
sia $t \in \mathbb{R}^3$, $t \neq 0$ t.c. $L_A(t) = \lambda t$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$

Allora

$$\left.\begin{array}{l} \langle t, t\rangle_{st} = \langle L_A(t), L_A(t)\rangle_{st} = \langle \lambda t, \lambda t\rangle = \lambda^2\langle t, t\rangle \\ t \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \langle t, t\rangle > 0 \text{ in partic } \langle t, t\rangle \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda^2 = 1 \quad \boxed{\lambda = \pm 1}$$

Si può verificare sostituendo che né $\lambda = 1$, né $\lambda = -1$ verificano l'equazione (4) a pag. 5.

$W \subset \mathbb{R}^3$ $\dim(W) = 1$ Allora $W^\perp \subset \mathbb{R}^3$ è sottospazio e $\dim(W^\perp) = 3 - 1 = 2$

$W \cap W^\perp = ?$ Sia $u \in W \cap W^\perp$ arbitrario.

Allora

$$\langle u, u \rangle = 0 \implies u = 0$$

$W \ni$ $\in W^\perp$

Se $(V, \langle\, , \rangle)$ è un qualsiasi sp. vett. euclideo e W un suo qualsiasi sottospazio vettoriale

$\dim(W) = r \implies \dim(W^\perp) = n - r \quad (n = \dim(V))$.

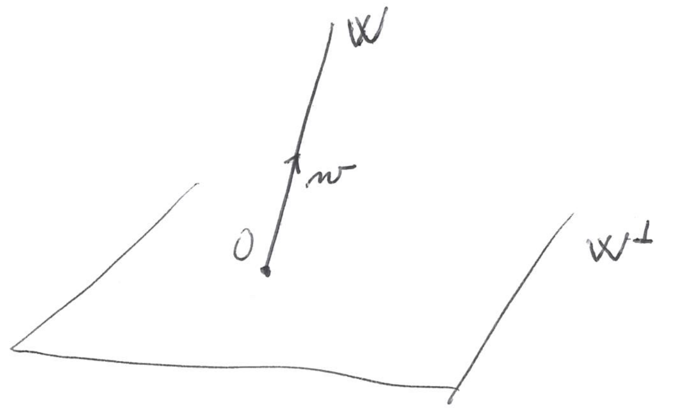
Il ragionamento fatto sopra mostra, allora, che

$W \cap W^\perp = \{0\}$.

La formula di Grassmann mostra allora che

$W + W^\perp = V$. Dunque $\underline{V = W \oplus W^\perp}$.

Torniamo al nostro esempio.



$u \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi

$u \in W^\perp \iff \langle u, w \rangle_{st} = 0$

Allora, se $u \in W^\perp$

$0 = \langle u, w \rangle_{st} = \langle L_A(u), L_A(w) \rangle_{st} =$

$= \langle L_A(u), w \rangle$

Dunque $L_A : W^\perp \longrightarrow \underline{\underline{W^\perp}}$

Come "funziona" questa restrizione di L_A a $W^\perp$?

Avrei bisogno di una base di $W^\perp$, magari di una base ON ...

Provare a farlo per <u>esercizio</u>.

L'alternativa è usare la testa.

Pongo $u_1 \overset{def}{=} \frac{w}{\|w\|}$.

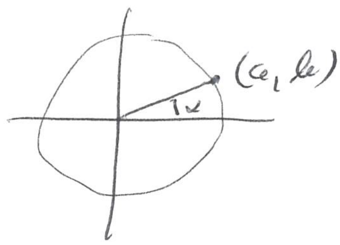
$W^\perp$ è ancora uno sp. vett. euclideo risp. alla restrizione di $\langle \, , \, \rangle_{st}$ a $W^\perp$. Sia u_2, u_3 una base ON di $W^\perp$. Allora u_1, u_2, u_3 è base ON di $\mathbb{R}^3$. Scambiando eventualmente tra di loro u_2 ed u_3 posso supporre che la matrice $P_{3\times 3}$ che ha per colonne u_1, u_2, u_3 abbia det $= 1$.

Devo capire chi è $L_A(u_2) \in W^\perp$ e $L_A(u_3) \in W^\perp$

$L_A(u_2) = a u_2 + b u_3$ $\quad\quad \|u_2\| = 1 \Rightarrow \|L_A(u_2)\| = 1$

cioè

$$1 = \langle a u_2 + b u_3 , a u_2 + b u_3 \rangle = a^2 + b^2$$



ovvero (a, b) è un punto della circonferenza goniometrica. Quindi esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{a = \cos(\alpha) \quad b = \operatorname{sen}(\alpha)}$

Inoltre $\|L_A(u_3)\| = 1$ e da $\langle u_2, u_3 \rangle_{st} = 0$ segue che si avrà anche

$\langle L_A(u_3), L_A(u_2) \rangle_{st} = 0$ $\quad\quad L_A(u_3) = c u_2 + d u_3$

$c^2 + d^2 = 1 \quad\quad ac + bd = 0$

Si hanno due possibilità

o $\begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases}$ oppure $\begin{matrix} c = b \\ d = -a \end{matrix}$

Quindi, rispetto alla base $(u_1, u_2, u_3) = \mathcal{E}$ L_A è rappresentato da una di queste due matrici

o $$A' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{\det = 1}$$

oppure da $$A' = \cancel{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{\det = -1}}$$

Prima abbiamo introdotto una matrice

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & & \\ & \cdots & \\ & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array} \qquad P = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}_c}(id)$$

ed avevamo fatto in modo che $\det(P) = 1$. Allora si ha anche $\det(P^{-1}) = 1$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_c \ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_A \ A"] & \mathbb{R}^3 \ \mathcal{B}_c \arrow[d, "id \ P^{-1}"] \\ \mathcal{E} \ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "P \ id"] \arrow[r, "A' \ L_{A'}"'] & \mathbb{R}^3 \ \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Questo diagramma mostra che

$$A' = P^{-1}AP$$

Infine

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) \overset{\text{T. Binet}}{=} \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$$

Quindi è suff. calcolare $\det(A)$ per sapere quale delle due matrici A' qui sopra funziona.