Applicazioni lineari
(vedere lez. Mecchia per le prime definizioni).

A matrice $m \times n$ a entrate in K
$L(A): K^n \longrightarrow K^m$ applicaz. lineare associata ad A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \longrightarrow \underbrace{A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{Ax} \in K^m$$

$L(A)(x) = Ax$ $\quad x$ = vettore colonna

Oss: Sia $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di K^n.

$$L(A)(e_1) = Ae_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a^1$$

$$L(A)(e_i) = a^i$$

Le colonne di A sono i corrispondenti dei vettori della base canonica.

Prop. $f: V \longrightarrow W$ appl. lineare
Allora
(i) Se $V' \subset V$ è un sottosp. vettoriale, allora $f(V') \subset W$ è un sottosp. vett.
(ii) Se $W' \subset W$ è un sottosp. vett. allora $f^{-1}(W') \subset V$ è un sottosp.
Ossia l'immagine di un sottosp. è sottosp. e la controimm.
In particolare $f(V) = \operatorname{Im} f$ = l'immagine di V.

Dim.

(i) Siano $w_1, w_2 \in f(V')$: allora $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ per opportuni $v_1, v_2 \in V'$

Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, considero

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \text{f conserva prod.}$$
$$= f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) = \text{f " somma}$$
$$= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in f(V).$$

Ma siccome V' è sottosp. e $v_1, v_2 \in V'$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V'$ e dunque $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in f(V')$.

(ii) Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(W')$ ossia $f(v_1) \in W'$, $f(v_2) \in W'$.

Consid. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$; devo verif. che $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in W'$.

Ma $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \in W'$, perché W' è sottospazio e dunque $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in f^{-1}(W')$.

— · —

Era stato visto negli esercizi che se V è un K-sp. vett. e X un insieme, allora $\mathrm{Appl}(X,V) = \{ f : X \to V \}$ è un K-sp. vett. definendo le operaz. punto per punto.

<u>Def.</u> V, W K-spazi vettoriali

$\mathrm{Hom}(V,W) = \{ f : V \to W \mid f$ <u>lineare</u> $\}$

f lineare : sinonimo <u>omomorfismo</u>

$\mathrm{Hom}(V, W)$ è un K-sp. vettoriale.

Dim.

- f, g lineari $\Rightarrow f+g$ lineare
- f lineare, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda f$ lineare
- 0 è lineare: appl. nulla
- altre prop. già verif. per $\mathrm{Appl}(V, W)$.

Oss. $\mathrm{Hom}(V, W) \subset \mathrm{Appl}(V, W)$ è un sottosp. vett.

In particolare $V^* \overset{def}{=} \mathrm{Hom}(V, K)$: spazio vettoriale duale.

Terminologia

Sia $f: V \to W$ appl. lineare = omomorfismo

- epimorfismo = suriettiva
- monomorfismo = iniettivo
- isomorfismo = biettivo
- endomorfismo se $V = W$
- automorfismo se $V = W$ e f è isomorfismo

Queste def. estendono quelle di omomorfismo di gruppi.

Prop. Sia $f: V \to W$ un isomorfismo. Allora $\exists f^{-1}: W \to V$ l'applicazione inversa.
Si ha che anche f^{-1} è lineare e dunque è un isom.

Dim. Poniamo $f^{-1} = g$ (per semplif. la scrittura).
Siano $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.
Dobbiamo verif. che $g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2)$.

~~Siccome~~ Esistono unici v_1 t.c. $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$, e dunque $g(w_1) = v_1$ e $g(w_2) = v_2$.

Allora $g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) \underset{f \text{ lin.}}{=}$

$$= g(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) \underset{g = f^{-1}}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 =$$

$$= \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2). \quad \blacksquare$$

Nucleo di un'applicazione lineare

Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare

Def. nucleo di f, denotato $\ker f$, il sottospazio di V

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

controimmagine del sottospazio nullo.

Prop. f è iniettiva (monomorfismo) $\iff$ $\ker f = (0)$ sottosp. nullo

Dim. Se f è iniettiva $f^{-1}(0)$ è formato da un unico elemento, necessariamente nullo.
Vicev., se $\ker f = (0)$, siano $v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = f(v_2)$; allora $\underbrace{f(v_1) - f(v_2)}_{= f(v_1 - v_2)} = 0$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f = (0) \Rightarrow v_1 - v_2 = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema della dimensione

Sia $f: V \to W$ appl. lineare
dim V finita

Allora $\dim V = \dim(\ker f) + \dim \operatorname{Im} f$

($\operatorname{Im} f = f(V)$ è sottospazio di W)
dim $\operatorname{Im} f$ è detto **rango di f** : $rg(f)$)

Dim. Sia $u_1, \dots, u_k$ una base di $\ker f$.
Completo a una base di V: $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$.

Vogliamo dim che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ è una base di $f(V)$.

a) Sono un sistema di generatori:
sia $w = f(v) \in f(V)$. Allora
$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$

$$w = f(v) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n v_n) =$$
$$= \lambda_1 \underset{0}{\underbrace{f(u_1)}} + \dots + \lambda_k \underset{0}{\underbrace{f(u_k)}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) =$$
$$= \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n).$$

b) Sono lin. indip.
Se $\mu_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \mu_n f(v_n) = 0$
$$\| $$
$$f(\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n) \Rightarrow$$

$\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n \in \ker f$
$$\|$$
$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$ perché $u_1, \dots, u_k$ è base di $\ker f$ $\Rightarrow$

$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k - \mu_{k+1} v_{k+1} - \dots - \mu_n v_n = 0$

$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_n = 0$. ∎

OSS: $v_1, \dots, v_n$ base di $V \Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\mathrm{Im}\, f$.

Corollario (importante)

Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare con $\dim V = \dim W$ finita (per es. $V = W$).

Allora

f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f è suriettiva $\Leftrightarrow$ f è biettiva.

Dim.

f iniett. $\Leftrightarrow \ker f = (0) \overset{\text{teor. della dim.}}{\Leftrightarrow}$ ~~Allo~~ $\dim V (= \dim W) = \dim \mathrm{Im}(f)$.

Ma $\mathrm{Im}(f) \subset W$ è sottospazio;

$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = W \Leftrightarrow$ f è suriettiva. ∎

Nel caso di endomorfismi di V, con $\dim V$ finita, ~~...~~

automorfismo $\Leftrightarrow$ endom. iniett. $\Leftrightarrow$ endom. suriettivo.

Esempio

V K-sp. vett. di dim finita

$\cup\!\mid$

W sottosp. vettoriale

V/W sp. quoziente

$\pi: V \longrightarrow V/W$ proiezione canonica.

$v \longrightarrow [v]$

Si ha:

- π è suriettiva per def.
- π è lineare perché le operaz. di $+$ e $\cdot$ sono compatibili con la relaz. d'equivalenza modulo W

  $\pi(\lambda v+\mu v') = [\lambda v+\mu v'] = \lambda[v]+\mu[v'] =$
  $= \lambda\pi(v)+\mu\pi(v')$.
- $\operatorname{Ker}\pi = \{v\in V \mid [v]=0=W\} = W$

Allora per il teor. della dim.:

$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\pi + \dim \operatorname{Im}\pi =$

$= \dim W + \dim V/W$

ovvia $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

<u>Esempio</u>

$A \quad m\times n \qquad A\in M(m\times n, K)$

$L(A): K^n \longrightarrow K^m$

$e_1 \longrightarrow a^1$

$\vdots$ colonne di A

$e_n \longrightarrow a^n$

Allora $\operatorname{Im}L(A)$ è generata da $a^1,\dots,a^n$, e perciò $\operatorname{rg}L(A) = \dim\langle a^1,\dots,a^n\rangle$ = rango per colonne di A.

Teorema della dim $\Rightarrow$

$\dim \operatorname{Ker}L(A) = n - $ rg per colonne di A

$\mathrm{Ker}\, L(A) = \{ x \in K^n \mid L(A)(x) = 0 \}$

$= \{ x \in K^n \mid A x = 0 \} = W$

spazio delle soluzioni del sistema omog.

Ma $\dim W = n - r$ dove r è il rango per righe di A

$\boxed{\text{Conseguenza: rango per righe è uguale a rango per colonne.}}$

Teorema di determinazione di un'appl. lineare.

V, W K-spazi vettoriali.

Fissata una base di V, $v_1, \dots, v_n$, e n vettori qualunque di W $w_1, \dots, w_n$,

esiste una e una sola appl. lineare $f: V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.

Dim.

Unicità.

Supp. che f esista e sia $v \in V$ un vettore qualunque. Allora v ha un'unica espressione

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Allora $f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \underset{L}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) =$

$= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$: unica. f lineare

Esistenza:

Prendiamo la precedente come def. di f, ponendo

$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$.

f è ben def.; basta dim. che f è lineare.

$f(\alpha v + \beta v') = ?$

Sia $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$v' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

perciò $\alpha v + \beta v' = \alpha\lambda_1 v_1 + \dots + \alpha\lambda_n v_n +$

$+ \beta\mu_1 v_1 + \dots + \beta\mu_n v_n =$

$= (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) v_1 + \dots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) v_n$ e

perciò

$f(\alpha v + \beta v') = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) w_1 + \dots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) w_n =$

$= \alpha(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n) + \beta(\mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n) =$

$= \alpha f(v) + \beta f(w)$. ∎

<u>Oss.</u> 1. ~~dim V = ...~~ la prop. precedente vale anche per sp. vett. di dim ∞.

<u>Oss. 2</u> Siano $v_1, \dots, v_n$ base di V

$w_1, \dots, w_n$ " " W

Allora $\exists!$ $f : V \to W$ e $\exists!$

$v_1 \to w_1$

$\vdots$

$v_n \to w_n$

$g : W \to V$.

$w_1 \to v_1$

$\vdots$

$w_n \to v_n$

Allora $(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g(w_i) = v_i \; \forall i$.

Dunque $(g \circ f)(v_i) = id_V(v_i) \; \forall i$

$\Rightarrow g \circ f = id_V$.

Analogam. $f \circ g = id_W$. Perciò f, g sono isomorfismi inversi uno dell'altro.

Cor. Se $\dim V = \dim W = n$, V e W sono isomorfi, cioè $\exists \; f : V \to W$ isomorfismo
$V \simeq W$. Basta fissare 2 basi.

In partic. $\dim V = n \Rightarrow V \simeq K^n$: ma isomorfismo non canonico, dipende dalla scelta di una base di V.

Fissata una base di V $(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{B}$, si def. $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$ t.c. $v_i \to e_i$.

Allora $\underset{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}{\overset{v}{=}} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, n-upla delle coordinate di v risp. a $\mathcal{B}$.

È un isomorfismo di spazi vettoriali: associa a ogni vettore le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

$K_B^{-1} : K^n \longrightarrow V$

$(x_1 - - x_n) \longrightarrow x_1 v_1 + - + x_n v_n \in V.$

Esempio

$\mathbb{C}$ è $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, una base è $(1, i)$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Allora $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$a+ib \longrightarrow (a,b)$

$1 \longrightarrow (1,0)$

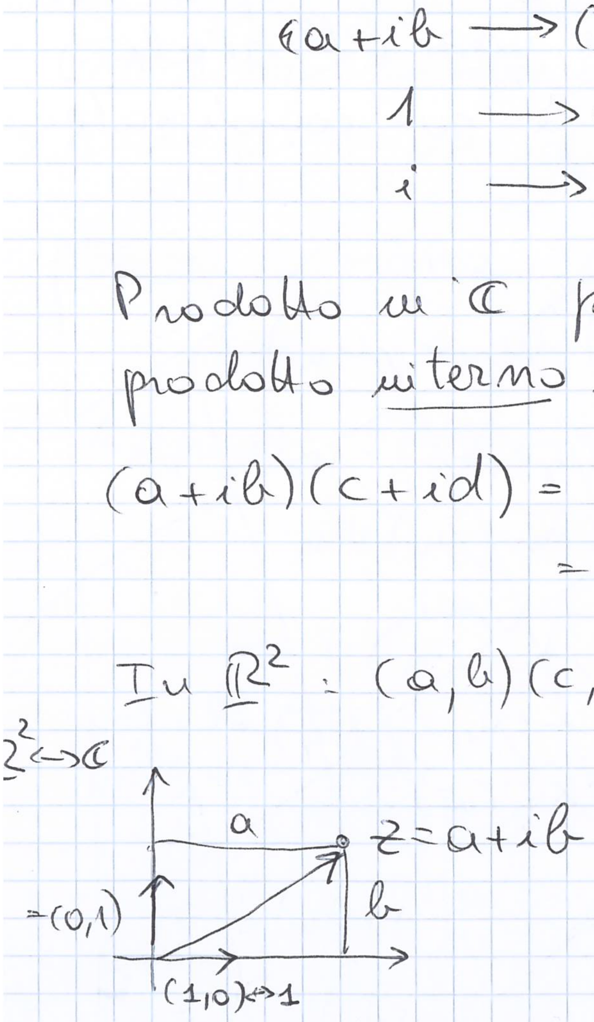
$i \longrightarrow (0,1)$

Prodotto in $\mathbb{C}$ permette di def. un prodotto interno in $\mathbb{R}^2$

$(a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad + i^2 bd =$

$= ac - bd + i(bc + ad)$

In $\mathbb{R}^2$: $(a,b)(c,d) \overset{def.}{=} (ac-bd, bc+ad)$



Def. modulo di $z = a+ib$

$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ numero reale

$\bar{z} = a - ib$ complesso coniugato

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$

Se $z \neq 0 \Rightarrow |z| \neq 0$. Allora considero $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \Rightarrow \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z^{-1}$:

Ogni elem. $z \neq 0$ è invertibile.

<u>$\mathbb{C}$ è un campo</u> che contiene $\mathbb{R}$.

$$\{\underset{\overset{\shortparallel}{a+ib}}{z} \in \mathbb{C} \mid \underset{\overset{\shortparallel}{\sqrt{a^2+b^2}}}{|z|} = 1\}$$ è la circf unitaria

$= \{z \in \mathbb{C} \mid a^2+b^2 = 1\}$ Allora a, b si possono scrivere $a = \cos\vartheta$, $b = \sin\vartheta$ con $0 \leq \vartheta < 2\pi$: $z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$.

<u>Def</u>. $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ esponenziale complesso.

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ Relazione di Eulero.

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) =$$
OK
$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}$$

Qualunque sia $z \neq 0$ $\frac{z}{|z|}$ ha modulo 1 e quindi $\frac{z}{|z|} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \Longrightarrow$

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$z = |z| e^{i\vartheta}$$

Prodotto in $\mathbb{C}$:

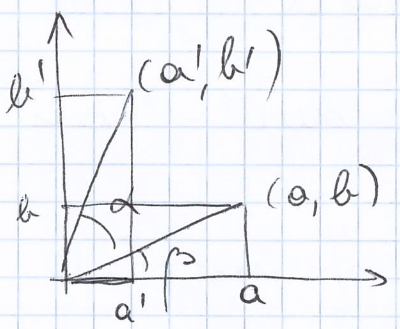
$$z_1 = |z_1| e^{i\alpha_1}$$

$$z_2 = |z_2| e^{i\alpha_2}$$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$$

La mappa
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{e^{i\alpha}} & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & e^{i\alpha} z \end{array}$$

è la rotazione di angolo α intorno all'origine.



$$a' = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\beta) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= \left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\beta\right)\cos\alpha + \left(\sqrt{a^2+b^2}\sin\beta\right)\sin\alpha =$$

$$= a\cos\alpha - b\sin\alpha$$

$$b' = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta) = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) =$$

$$= \left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\beta\right)\sin\alpha + \left(\sqrt{a^2+b^2}\sin\beta\right)\cos\alpha =$$

$$= a\sin\alpha + b\cos\alpha$$

$$(a', b') = (a\cos\alpha + b\sin\alpha,\ a\sin\alpha + b\cos\alpha) =$$

$$= \underbrace{(a, b)\cdot(\cos\alpha, \sin\alpha)}_{\text{prod. interno}}$$

$${}^t(a',b') = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad : \quad \text{è}$$

$$L(A): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$$(a,b) \longrightarrow (a',b')$$

In $\mathbb{C}$ si ha $\mathbb{C} \xrightarrow{e^{i\alpha}} \mathbb{C}$.

$$z \longrightarrow e^{i\alpha} z$$

$$1 \longrightarrow e^{i\alpha}$$

Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi fissate.

Sia $f: \overset{n}{V} \longrightarrow \overset{m}{W}$ lineare

Fissiamo basi

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

Allora $\forall j = 1, \dots, n$

$f(v_j)$ si può scrivere come comb. lin. di $w_1, \dots, w_m$ della forma $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

__Def__. matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$

$$\underset{m\times n}{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & \quad f(v_n) \end{array} \end{array}$$

Allora se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$

$f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) =$

$= x_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m) + x_2(a_{12}w_1 + \dots + a_{m2}w_m) + \dots$

$\dots + x_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m) =$

$= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n})w_1 + \dots + (x_1a_{m1} + x_2a_{m2} \dots +$

$+ x_na_{mn})w_m = y_1w_1 + \dots + y_mw_n$ con

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$Y = AX$ dove $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f(X)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Posso scrivere il diagramma:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"'] & W \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"'] & K^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d] & f(v) \arrow[d] \\ (x_1 \dots x_n) \arrow[r] & (y_1 \dots y_m) \end{tikzcd}$$

livello astratto

livello computazionale

è un diagramma <u>commutativo</u>

ossia $K_{\mathcal{B}} \circ f = L(A) \circ K_{\mathcal{A}}$

<u>Teorema</u> $\underset{n}{f : V} \to \underset{m}{W}$ lineare, V, W di dim finita

Esistono basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W tali che $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{r} \\ m-r \{ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{0}_{n-r} \end{array}\right)$ dove $r = rg\, f$.

V sp. vett. di dim n, $B = (v_1, \dots, v_n)$ sia una sua base.

Consid. $V^* = \mathrm{Hom}(V, K) = \{\varphi : V \to K \mid \varphi \text{ lineare}\}$: forme lineari su V (o funzioni lineari).

Def. $v_1^* \in V^*$ come l'unica appl. lineare $v_1^* : V \to K$ t.c.

$$v_1 \to 1,\quad v_2 \to 0,\quad \vdots \quad v_n \to 0$$

(teor. di determ. di un'appl. lineare).

Dunque $v_1^*(v) = v_1^*(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1$: prima coordinata di v risp. a B.

Analogam. $\forall i = 1, \dots, n$; def. v_i^* come l'unica appl. lineare t.c. $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, e dunque $v_i^*(v) = x_i$.

$v_1^*, \dots, v_n^*$ sono le <u>funzioni coordinate</u> rispetto a B.

<u>Prop.</u> $v_1^*, \dots, v_n^*$ formano una base di V^*, detta base duale di V.

<u>Dim.</u> 1) Sono lin. indip.:

$\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0 \iff \forall\, v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$ si ha $(\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = 0$

$\lambda_1 v_1^*(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) + \dots + \lambda_n v_n^*(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$
$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$

In partic. per $v = v_i$ otteniamo $\lambda_i = 0$, perciò $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

2). Generano V^*.

Sia $\varphi : V \to K$ un'appl. lineare.

Cerchiamo di scrivere φ come $\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$.

+ avremo che $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$ $\iff$ coincidono sui vettori di $\mathcal{B}$, cioè se

$$\varphi(v_1) = (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_1) = \lambda_1$$

$$\vdots$$

$$\varphi(v_n) = (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_n) = \lambda_n.$$

Allora ~~basta porre~~ si ha

$$\varphi = \varphi(v_1) v_1^* + \dots + \varphi(v_n) v_n^*.$$

~~Dimostrare che~~ Analogamente si ha $\forall v \in V$:

$$\boxed{v = v_1^*(v) v_1 + \dots + v_n^*(v) v_n.}$$

Dim. $r = \mathrm{rg} f$, n è la dim del dominio dunque $\dim \mathrm{Ker} f = n - r$.
Gli ultimi $n-r$ elementi di $\mathcal{A}$ devono formare una base di $\mathrm{Ker} f$; quindi parto da $v_{r+1}, \dots, v_n$ base di $\mathrm{Ker} f$ e la prolungo a una base $\mathcal{A}$ di V:

$$v_1 \dots v_r, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{base di Ker} f}.$$

Sappiamo che $\underset{w_1}{f(v_1)}, \dots, \underset{w_r}{f(v_r)}$ è una base di $\mathrm{Im} f$, la prolungo a una base $\mathcal{B}$ di W:

$$w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m.$$

Allora risp. a queste 2 basi la matrice è quella voluta:

$$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_r) = w_r, f(v_{r+1}) = 0, \dots, f(v_n) = 0.$$