ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 5

Trieste, 11 novembre 2017

1. (i) Sia $V = K[t]$ il K-spazio vettoriale dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti nel campo K. Sia $\mathcal{B}$ la sua base formata dai polinomi $v_i = t^i$, $i \in \mathbb{N}$. Siano v_i^* le forme lineari su V definite da $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker). Dimostrare che tali forme lineari non generano lo spazio vettoriale duale V^*.

(ii) Sia ora $\{v_i\}_{i \in I}$ una base di uno spazio vettoriale V, con I un insieme d'indici arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ forme lineari definite come sopra. Dimostrare che i $v_i^*, i \in I$, sono linearmente indipendenti, e che generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.

2. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e $G = \{(v, f(v) : v \in V\} \subset V \times W$ il grafico di f. Dimostrare che f è lineare se e solo se G è un sottospazio vettoriale di $V \times W$.

3. Sia $f = L(A) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare il rango di f e la dimensione del nucleo di f;
(2) trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine di f;
(3) stabilire per quali valori reali di h $(-2, h, h^2) \in Im(f)$.

4. Si consideri il sistema lineare omogeneo avente M come matrice associata:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Discutere e risolvere il sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.

5. Sia $V = \mathbb{R}[x]_3$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella indeterminata x, e $\mathcal{B}$ la sua base $(1, x, x^2, x^3)$.

(1) Sia $T : V \to V$ l'applicazione definita da $T(p(x)) = p'(x)(x-1)$, dove p' denota la derivata di p. Verificare che T è lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$;
(2) descrivere $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ e calcolare le loro dimensioni;
(3) verificare che $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.