V spazio vettoriale $/\mathbb{R}$ $\dim(V) = n$

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo, cioè f è appl. lineare

IDEA: vedere se si può "scomporre" V in sottospazi

$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$ tali che

1) $f|_{W_h}: W_h \longrightarrow W_h$

OSSERVARE che 2) $\Rightarrow$ 1). 1) è messo per "chiarire" la situazione a passi

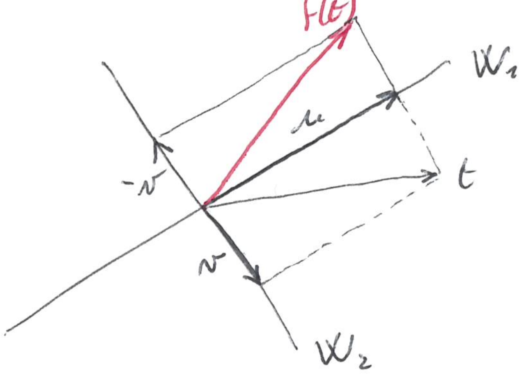
2) Dato W_h ad esso è associato $\lambda_h \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $u \in W_h$ si ha $f(u) = \lambda_h \cdot u$

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$ $f = L_A$ dove $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$

Allora vedremo dopo che esistono due sottospazi W_1, W_2 di $\mathbb{R}^2$, con $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$ tali che $\underset{(1)}{\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2}$ e

$f(u) = u$ per ogni $u \in W_1$ cioè $\lambda_1 = 1$

$f(v) = -v$ per ogni $v \in W_2$ $\lambda_2 = -1$



Preso $t \in \mathbb{R}^2$ qualsiasi

$\underbrace{t = u + v}$ dove $u \in W_1$, $v \in W_2$

è possibile in un unico modo per (1). Allora

$f(t) = f(u+v) = f(u) + f(v) = u - v$

Si capisce "meglio" quello che si sta facendo con f.

OSSERVAZIONE

Vedremo che non sempre è possibile realizzare il programma 1), 2) qui sopra.

La definizione fondamentale è:

<u>Def.</u> Dato l'endomorfismo $f: V \longrightarrow V$, allora $v \in V$ è detto AUTOVETTORE relativo all'AUTOVALORE $\lambda \in \mathbb{R}$ se

1) $\underline{\underline{v \neq 0_V}}$ 2) $f(v) = \lambda v$ ⟵ Innanzitutto voglio chiarire $W_1 \oplus \dots \oplus W_r$

<u>LEMMA</u> Sia $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo, e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ autovalori <u>distinti</u> di f. Siano, inoltre, $v_1, \dots, v_r \in V$ tali che

$$v_i \neq 0_V \quad e \quad f(v_i) = \lambda_i v_i \qquad \forall i = 1, \dots, r$$

Allora $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

<u>Dim.</u>
La dimostrazione è per induzione su r.

Se $r = 1$ allora $v_1 \neq 0_V$, dunque v_1 è lin. indip..
Sia $r > 1$, e supponiamo vera la ~~...~~ tesi per $r-1$. Allora sia

$$(\ast) \quad a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0_V \implies$$

$$0_V = f(0_V) = f(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r) = a_1 f(v_1) + \dots + a_r f(v_r) =$$

$$= a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \underline{a_r} \lambda_r \underline{v_r} = a_1(\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \dots + a_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1}$$

$$(\ast) \implies a_r v_r = \overbrace{-a_1 v_1 - \dots - a_{r-1} v_{r-1}}^{\text{sost.}}$$ ma $v_1, \dots, v_{r-1}$ sono lin. indip. per ip. induttiva

Allora $a_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_r)}_{\neq 0} = 0 \; \dots \; a_{r-1} \underbrace{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)}_{\neq 0} = 0 \implies \underline{\underline{a_1 = \dots = a_{r-1} = 0}}$

Quindi $(\ast)$ si riduce a $a_r v_r = 0_V$ con $v_r \neq 0_V \Rightarrow a_r = 0$

■

<u>COROLLARIO</u> Siano $V, f, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ come nel lemma precedente. Definiamo

$W_h = \{v \in V \mid f(v) = \lambda_h v\}$ $\forall h = 1, \dots, r$.

Allora W_h è un <u>sottospazio vettoriale</u> di V $\forall h$.

Inoltre, se $v \in W_1 + \dots + W_r$ $(\subset V)$, cioè $v = v_1 + \dots + v_r$ con $v_h \in W_h$ $\forall h$, allora $v_1, \dots, v_r$ sono <u>unici</u>.

<u>Dim.</u>

Fisso h con $1 \le h \le r$.

$-\lambda_h \, id_V : V \longrightarrow V$ è endomorfismo, quindi anche $f - \lambda_h \, id_V : V \longrightarrow V$ è endomorfismo di V. Allora se $v \in W_h$ ho $f(v) = \lambda_h v \iff f(v) - \lambda_h v = 0_V \iff v \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_h \, id_V)$. Cioè

$W_h = \operatorname{Ker}(f - \lambda_h \, id_V)$ e questo è sottospazio di V

Supponiamo, poi (per dimostrare la seconda parte del corollario), che $v = v_1' + \dots + v_r'$ con $v_h' \in W_h$ $\forall h$.

Dobbiamo dimostrare che $v_h = v_h'$ $\forall h$.

Per assurdo, sia $v_h \neq v_h'$ per qualche h.

$\iff v_h - v_h' \neq 0$

È lecito supporre che questo accada per i primi $s (\le r)$ indici h, e solo per quelli. Allora da:

$v_1 + \dots + v_r = v = v_1' + \dots + v_s'$ segue $\underbrace{(v_1 - v_1')}_{\in W_1, \neq 0} + \dots + \overbrace{\underbrace{(v_s - v_s')}_{\in W_s, \neq 0}}^{= v - v =} = 0$

Ma questo è assurdo per il lemma precedente.

$W_1, W_2 \subset V$ sottospazi. Abbiamo detto che $W_1 + W_2$ si dice SOMMA DIRETTA $\Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ preso comunque $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$, allora w_1, w_2 sono unici.

Più precisamente, se $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ con $w_1, w_1' \in W_1$ e $w_2, w_2' \in W_2$, allora $w_1 = w_1'$ e $w_2 = w_2'$

In questo senso, esprimeremo la situazione nell'enunciato del corollario così:

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r \quad (\subset V)$$

Non è difficile dimostrare che (è una conseguenza del lemma)

$$\dim(W_1 \oplus \dots \oplus W_r) = \underbrace{\dim(W_1)}_{\geq 1} + \dots + \underbrace{\dim(W_r)}_{\geq 1} \quad (\leq n)$$

SPIEG.

Supponiamo che si abbia $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$.
(NB: questo non è sempre vero). $g_h = \dim(W_h)$

Siano

$$(*)\quad [\underbrace{v_{11}, \dots, v_{1g_1}}_{\text{base di } W_1}, \underbrace{v_{21}, \dots, v_{2g_2}}_{\text{base di } W_2}, \dots, \underbrace{v_{r1}, \dots, v_{rg_r}}_{\text{base di } W_r}$$

Allora questi $g_1 + g_2 + \dots + g_r = n$ vettori formano una base di V. SPIEGARE

Com'è la matrice di f rispetto alla base $(*)$?

$$
D = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
\lambda_1 \cdots \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 \cdots \lambda_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_r \cdots \lambda_r
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
v_{11} \cdots v_{1g_1} \\
v_{21} \cdots v_{2g_2} \\
\vdots \\
v_{r1} \cdots v_{rg_r}
\end{array}
\\
\begin{array}{cccc}
f(v_{11}) \cdots f(v_{1g_1}) & f(v_{21}) \cdots f(v_{2g_2}) & \cdots & f(v_{r1}) \cdots f(v_{rg_r})
\end{array}
&
\end{array}
$$

è una matrice **DIAGONALE**: $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$ perché $f(v_{11}) = \lambda_1 v_{11}$ ecc.

La base (*) di V è tutta costituita da autovettori per f.

La base (*) e la matrice D sono il punto di arrivo di un procedimento detto di **DIAGONALIZZAZIONE** di f

ESEMPIO

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad f = L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Cerco gli autovalori e gli autovettori di L_A.

$L_A(v) = \lambda v$ per qualche $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ e per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

$v = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\quad L_A(v) = Av = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix} = \lambda v = \lambda \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{vmatrix}$

$\begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$ $\quad$ ma so che $v = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Questo significa $x \neq 0$ oppure $y \neq 0$.

Se $y \neq 0$ allora $(1-\lambda) y = 0 \Longrightarrow 1-\lambda = 0$ $\underline{\lambda = 1}$

Se $y = 0$, allora $x \neq 0$ e da $(1-\lambda) x = 0$ <u>SPIEGARE</u>!

segue ancora $\underline{\lambda = 1}$

Quindi l'unico autovalore possibile per L_A è $\underline{\lambda = 1}$

Adesso cerco gli autovettori:

$$L_A\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y \\ y \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x+y \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x+y = x \\ y = y \end{cases}$$

dalla prima segue $y = 0 \Rightarrow u = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix}$ con $x \neq 0$

Ad esempio, e_1 è un autovettore.

È meglio pensare così:

- so che $\lambda = 1$ è autovalore
- $A - 1 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ è la matrice (rispetto alla $\mathcal{B}_c$) di $L_A - id_{\mathbb{R}^2}$

$(id_{\mathbb{R}^2} = 1 \cdot id_{\mathbb{R}^2})$

- Cerco il $\mathrm{Ker}(L_{A-I_2})$; per questo devo risolvere il SLO:

$$(A - I_2)\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{rg=1} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo spazio delle soluzioni ha dimensione

$\#$ indeterm $- rg(A - I_2) = 2 - 1 = 1$.

<u>Riassumendo</u> $W_1 = \{a e_1 \mid a \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2$ e non si ha

13/11/17 (7)

la diagonalizzazione.

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$ $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$

$f = L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Cerco i sottospazi $W_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ (se esistono ...).

È da vedere, innanzitutto, per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali:

$A\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \iff (A - \lambda I_2)\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ ha soluzioni $\neq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\iff rg(A - \lambda I_2) < 2 \iff \det(A - \lambda I_2) = 0$

$$\det\begin{bmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) - \lambda \end{bmatrix} = -(\cos(\alpha) - \lambda)(\cos(\alpha) + \lambda) - \operatorname{sen}^2(\alpha) =$$
$$= -\cos^2(\alpha) + \lambda^2 - \operatorname{sen}^2(\alpha) = \underline{\underline{\lambda^2 - 1 = 0}}$$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$ $\underline{\lambda = 1}$ oppure $\underline{\lambda = -1}$

$\boxed{\lambda = 1}$ il SLO è $\begin{cases} (\cos(\alpha) - 1)x + \operatorname{sen}(\alpha)y = 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha)x - (\cos(\alpha) + 1)y = 0 \end{cases}$

Il rango della matrice dei coefficienti è ≤ 1.

In realtà, è 1:

se $\operatorname{sen}(\alpha) \neq 0$. OK. Sia $\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Allora $\cos(\alpha) = \pm 1$ SPIEGARE. Una delle due equaz. è tutta nulla, ma l'altra NO. Questo è un caso particolare SPIEGARE

Considero una sola equaz.

$v_{1,1} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) \\ 1 - \cos(\alpha) \end{vmatrix}$ $W_1 \subset \mathbb{R}^2$ ha dim $= 1$ ed è generato da $v_{1,1}$

$\boxed{\lambda=-1}$ farlo per ESERCIZIO, in analogia al caso precedente. Si trova ($\lambda_2=-1$) $v_{2,1}$, che genera W_2. Quindi in questo caso si ha $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$

ESERCIZIO Verificare che $v_{11} \perp v_{21}$.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$