AMMORTAMENTI A RATE POSTICIPATE

Ci mettiamo nell'ipotesi che l'operazione sia regolata secondo la legge della capitalizzazione composta con **tasso di interesse periodale** i <u>coerente con la periodicità di pagamento delle rate</u>.

$$\begin{array}{ccccc} +S & -R_1 & \dots & -R_{m-1} & -R_m \\ \hline 0 & 1 & \dots & m\text{-}1 & m \end{array}$$

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S, -R_1, -R_2, \dots, -R_m\}/\{0, 1, 2, \dots, m\}$$

con $\quad R_k = C_k + I_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad$ **rate d'ammortamento**

$C_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=1}^{m} C_k = S$

$I_k \quad$ **quota interesse** maturata in $[k-1, k]$ e pagata in k, $k = 1, 2, \dots, m$

L'operazione deve soddisfare la condizione di equità:

$$W(0, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = 0$$

Restituzione del capitale in unica soluzione e pagamento periodico degli interessi posticipati

Consideriamo il caso:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{m-1} = 0 \qquad\qquad C_m = S$$

in cui si ha la restituzione del capitale in unica soluzione, a scadenza.

Si ha

$$I_k = i \cdot S \;\;,\;\; k = 1, \ldots, m; \qquad \text{quindi} \qquad R_k = i \cdot S \;\;,\;\; k = 1, \ldots, m-1; \quad R_m = i \cdot S + S$$

L'operazione finanziaria

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S, -i \cdot S, -i \cdot S, \ldots, -i \cdot S - S\} / \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

è equa.

Osservazione: interpretazione finanziaria per la formula

$$a_{\overline{m|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - i \cdot a_{\overline{m|}\,i} - (1+i)^{-m} = 0$$

Può essere interpretata come condizione di equità per l'operazione finanziaria

$$\{1, -i, -i, \ldots, -i-1\} / \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in k con $k=1,\ldots,m-1$.

Qual è la somma D_k da pagare in k per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità?

Sia $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}=\{S,-i\cdot S,-i\cdot S,\ldots,-i\cdot S,-i\cdot S-D_k\}/\{0,1,2,\ldots,k-1,k\}$ l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(k,\boldsymbol{y})=0 \quad \Leftrightarrow \quad S(1+i)^k-(i\cdot S)\,s_{\overline{k}|\,i}-D_k=0 \quad \Leftrightarrow \quad D_k=S$$

Si noti che $D_k=M(k,\boldsymbol{x})$.

Si definisce D_k **debito residuo** in k dopo il pagamento della rata R_k , $k=1,\ldots,m$

$$D_k=S \qquad k=1,\ldots,m-1$$

$$D_0=S\,,\quad D_m=0$$

Si ha allora che la quota interesse pagata in k

$$I_k=i\cdot S \qquad k=1,\ldots,m$$

matura nell'intervallo $[k-1,k]$ sul debito residuo D_{k-1} , cioè $I_k=i\cdot D_{k-1}$

Osservazione

Consideriamo invece il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in t con $k < t < k+1$. Qual è la somma D_t da pagare in t per chiudere l'operazione, mantenendo la condizione di equità?

Sia

$$\boldsymbol{y} / \boldsymbol{s} = \{S, -i \cdot S, -i \cdot S, \dots, -i \cdot S, -D_t\} / \{0, 1, 2, \dots, k, t\}$$

l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(t, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S(1+i)^t - (i \cdot S)\, s_{\overline{k|}\, i}(1+i)^{t-k} - D_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_t = M(t, \boldsymbol{x})$$

Quindi il debito residuo coincide con il montante.

Si noti che

$$D_t = M(t, \boldsymbol{x}) = M(k, \boldsymbol{x})(1+i)^{t-k} = S(1+i)^{t-k}.$$

Ammortamento progressivo a rate posticipate

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S, -R_1, -R_2, \ldots, -R_m\} / \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

con $R_k = C_k + I_k$ $\quad k = 1, 2, \ldots, m$ $\quad$ **rate d'ammortamento**

C_k $\quad k = 1, 2, \ldots, m$ $\quad$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=1}^{m} C_k = S$

I_k **quota interesse** maturata in $[k-1, k]$ e pagata in k, $k = 1, 2, \ldots, m$

L'operazione deve soddisfare la condizione di equità:

$$W(0, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = 0$$

Si definisce D_k **debito residuo** in k dopo il pagamento della rata R_k , $k = 1, \ldots, m$

$$D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h = \sum_{h=k+1}^{m} C_h \qquad k = 1, \ldots, m-1$$

$$D_0 = S, \quad D_m = 0$$

La quota interessi I_k matura nell'intervallo $[k-1, k]$ sul debito residuo D_{k-1}

$$I_k = i\, D_{k-1} \qquad k = 1, \ldots, m$$

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in k con $k=1,\dots,m-1$. Qual è la somma X da pagare in k, dopo aver pagato la rata R_k, per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità?

Sia $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}=\{S,-R_1,-R_2,\dots,-R_k-X\}/\{0,1,2,\dots,k\}$ l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(k,\boldsymbol{y})=0 \quad\Leftrightarrow\quad S(1+i)^k-R_1(1+i)^{k-1}-R_2(1+i)^{k-2}-\dots-R_k-X=0$$

$$\Leftrightarrow\quad X=M(k,\boldsymbol{x})$$

Quindi il montante è la somma da pagare per estinguere anticipatamente il prestito.

Osservazione

Se consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in t con $k<t<k+1$, il montante è ancora la somma da pagare in t per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità. Infatti, l'operazione finanziaria

$$\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}=\{S,-R_1,-R_2,\dots,-R_k,-M(t,\boldsymbol{x})\}/\{0,1,2,\dots,k,t\}$$

è equa.

Proviamo che il debito residuo

$$D_k = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_k \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

coincide con il montante

$$M(k, \boldsymbol{x}) = S(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \ldots - R_k \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

È inoltre

$$M(0, \boldsymbol{x}) = S = D_0$$

<u>Lemma</u>: relazione ricorrente per il montante

Si ha

$$M(k+1, \boldsymbol{x}) = M(k, \boldsymbol{x})(1+i) - R_{k+1}$$

Proviamo che

$$M(k, \boldsymbol{x}) = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_k = D_k \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

Si dimostra per induzione.

<u>Base</u>: $M(0,\boldsymbol{x}) = S = D_0$

<u>Passo induttivo</u>:

se $M(k,\boldsymbol{x}) = S - C_1 - \ldots - C_k = D_k$ allora $M(k+1,\boldsymbol{x}) = S - C_1 - \ldots - C_k - C_{k+1} = D_{k+1}$

Dalla relazione ricorrente per il montante, e sfruttando l'ipotesi induttiva, si ha

$$M(k+1,\boldsymbol{x}) = M(k,\boldsymbol{x})(1+i) - R_{k+1} = D_k(1+i) - C_{k+1} - I_{k+1} = D_k - C_{k+1}$$

Poiché

$$D_k = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_k$$

si ha

$$M(k+1,\boldsymbol{x}) = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_k - C_{k+1} = D_{k+1}$$

È così provato il passo induttivo.

Riassumendo,

$$I_k = i\, D_{k-1} \qquad k = 1, \ldots, m$$

con

$$D_{k-1} = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_{k-1}\,, \quad k = 2, \ldots, m \qquad \text{e} \qquad D_0 = S$$

Inoltre

$$D_k = M(k, \boldsymbol{x}) \qquad k = 0, \ldots, m$$

Poiché

$$W(k, \boldsymbol{x}) = M(k, \boldsymbol{x}) + V(k, \boldsymbol{x}) \qquad \text{e} \qquad W(k, \boldsymbol{x}) = 0$$

si ha

$$D_k = M(k, \boldsymbol{x}) = -V(k, \boldsymbol{x}) \qquad k = 0, \ldots, m$$

essendo

$$V(k, \boldsymbol{x}) = -R_{k+1}(1+i)^{-1} - R_{k+2}(1+i)^{-2} - \ldots - R_m(1+i)^{-(m-k)}$$

Osservazione: $V(k, \boldsymbol{x})$ rappresenta il bilancio finanziario in k dell'operazione finanziaria $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$; in particolare, tale bilancio finanziario può essere valutato ad un tasso i' diverso dal tasso i per il quale l'operazione finanziaria è equa.

Verifica della condizione di equità

Siano

$C_k \quad k=1,2,\dots,m$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=1}^{m} C_k = S$

$I_k \quad k=1,2,\dots,m$ **quote interesse** con $I_k = i\, D_{k-1}$

essendo

$$D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h = \sum_{h=k+1}^{m} C_h \qquad k=1,\dots,m-1$$

$$D_0 = S\,, \quad D_m = 0$$

il **debito residuo** in k dopo il pagamento della rata R_k , $k=1,\dots,m$

Risultano così assegnate le **rate d'ammortamento**

$$R_k = C_k + I_k \qquad k=1,2,\dots,m$$

Proviamo che l'operazione

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S, -R_1, -R_2, \dots, -R_m\}/\{0,1,2,\dots,m\}$$

soddisfa la condizione di equità: $W(0,\boldsymbol{x}) = 0 \iff S - \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = 0$

Dalla relazione ricorrente per il montante

$$M(k,\boldsymbol{x}) = M(k-1,\boldsymbol{x})(1+i) - R_k$$

si ha

$$R_k = M(k-1,\boldsymbol{x})(1+i) - M(k,\boldsymbol{x}) = D_{k-1}(1+i) - D_k$$

quindi

$$R_k(1+i)^{-k} = D_{k-1}(1+i)^{-(k-1)} - D_k(1+i)^{-k}$$

Sommando si ottiene

$$\sum_{k=1}^{m} R_k(1+i)^{-k} = \sum_{k=1}^{m} D_{k-1}(1+i)^{-(k-1)} - \sum_{k=1}^{m} D_k(1+i)^{-k} = D_0 - D_m(1+i)^{-m} = D_0 = S$$

È così provata la condizione di equità.

Piano d'ammortamento

k	R_k	C_k	I_k	D_k
0				$D_0 = S$
1	R_1	C_1	I_1	$D_1 = D_0 - C_1$
2	R_2	C_2	I_2	$D_2 = D_1 - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	R_m	C_m	I_m	$D_m = 0$
		S		

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue posticipate e quote capitali pari rispettivamente a 5.000, 10.000, 20.000 e 15.000 euro.

AMMORTAMENTO A RATE POSTICIPATE E QUOTE CAPITALI COSTANTI

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S, -R_1, -R_2, \ldots, -R_m\} / \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

con $R_k = C_k + I_k$ $\quad k = 1, 2, \ldots, m$ $\quad$ rate d'ammortamento

C_k $\quad k = 1, 2, \ldots, m$ $\quad$ quote capitale $\quad$ tali che

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_m = C$$

quindi per il vincolo di chiusura $\sum_{k=1}^{m} C_k = S$ $\quad$ si ha $\quad C = \frac{S}{m}$

I_k $\quad k = 1, 2, \ldots, m$ $\quad$ quote interesse $\quad$ con $\quad I_k = i\, D_{k-1}$

essendo $\quad D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h = \sum_{h=k+1}^{m} C_h = S - kC = (m-k)C \qquad k = 1, \ldots, m-1$

$$D_0 = S \,, \quad D_m = 0$$

L'operazione finanziaria $\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t}$ è equa.

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue posticipate e quote capitali costanti.

AMMORTAMENTO A RATE COSTANTI POSTICIPATE

Nell'ammortamento a rate costanti posticipate si ha

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_m = R$$

quindi

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S, -R, -R, \ldots, -R\} / \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

Per la condizione di equità si ha

$$W(0, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=1}^{m} R(1+i)^{-k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - R\, a_{\overline{m|}\, i} = 0$$

Indicate con $R_k = C_k + I_k \qquad k = 1, 2, \ldots, m$ le rate d'ammortamento

si ha

$I_k \qquad k = 1, 2, \ldots, m$ quote interesse con $I_k = i\, D_{k-1}$

Il debito residuo $D_k = \sum_{h=k+1}^{m} C_h \qquad k = 0, \ldots, m-1$

è dato da

$$D_k = R\, a_{\overline{m-k|}\, i} \qquad k = 0, \ldots, m-1$$

Negli ammortamenti progressivi le quote interessi sono non crescenti.

Nel caso dell'ammortamento a rate costanti, le quote interesse sono decrescenti, quindi le quote capitale sono crescenti. Si ha che le quote capitale sono crescenti in progressione geometrica di ragione $(1+i)$

$$C_{k+1} = C_k(1+i) \qquad\qquad k = 1, 2, \dots, m-1$$

Si ha allora

$$C_k = C_1(1+i)^{k-1} \qquad\qquad k = 1, 2, \dots, m$$

essendo $\quad C_1 = R - I_1 = R - i\,S = R - i\left(R\,a_{\overline{m|}\,i}\right) = R(1+i)^{-m} = R\,v^m$

Quindi $\quad C_k = R\,v^{m-k+1} \qquad\qquad k = 1, 2, \dots, m$

Si possono allora calcolare direttamente le quote capitale conoscendo la rata costante.

<u>Osservazione</u>:

$$C_k = R - I_k = R - i\,D_{k-1} = R - i\left(R\,a_{\overline{m-k+1|}\,i}\right) = R(1+i)^{-(m-k+1)} = R\,v^{m-k+1} \qquad k = 1, 2, \dots, m$$

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue costanti posticipate.

ESERCIZI SU AMMORTAMENTI A RATE POSTICIPATE

- Si contrae un prestito di 30.000 euro al tasso annuo del 5,8%.
  Calcolare il numero minimo di rate di ammortamento costanti posticipate se l'importo massimo della rata che si è disposti a pagare è 3.600 euro.

- Esercizio tratto da un compito d'esame.

  Un finanziamento di 100.000 euro è ammortizzato in 20 anni al tasso di interesse annuo del 5,2% mediante il versamento di rate semestrali costanti posticipate. Redigere le prime 2 e le ultime 2 righe del piano di ammortamento (in modo da evidenziare le grandezze finanziarie rilevanti, relative alle prime 2 ed alle ultime 2 rate).
  Alla scadenza della dodicesima rata, il risparmiatore decide di estinguere parte del debito residuo versando, oltre alla rata in scadenza, 30.000 euro a titolo di rimborso parziale del prestito. Determinare l'ammontare del debito residuo subito dopo il pagamento della dodicesima rata. Calcolare inoltre l'ammontare della nuova rata costante di ammortamento, tenendo conto dell'estinzione parziale del prestito e mantenendo inalterate le scadenze delle rate ancora da pagare.