1/3/2012 Geometria 3 - A 2012/13

Ambiente: $\mathbb{R}^n$ spazio affine euclideo, con prodotto scalare standard, metrica, topologia...

Curva = curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$ data da un'applicazione

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad I \subset \mathbb{R} \text{ intervallo aperto}$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

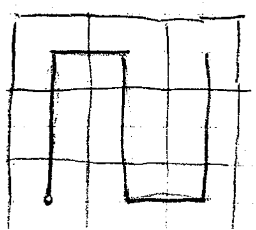
Le componenti sono funzioni reali di variabile reale, t è il parametro.

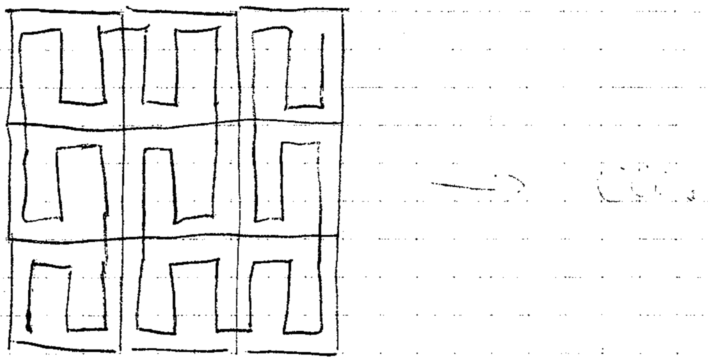
Bisogna imporre condizioni alle funz $x_i(t)$; si può supporre:

- $\alpha(t)$ continua $\iff x_i(t)$ continua $\forall i$) C^0
- di classe C^1, o C^k : $\exists f^{(k)}$ continua
- differenziabile ossia di classe C^∞ (liscia)

Non basta supporre $\alpha(t)$ continua per ottenere ciò che corrisponde alla nostra idea di curva, cioè che l'immagine di $\alpha(t)$ sia di dimensione 1. Infatti esistono funzioni continue dall'intervallo $[0,1]$ al quadrato in $\mathbb{R}^2$ suriettive.

Il primo esempio fu dato nel 1890 da Giuseppe Peano (curva di Peano). La curva è def. come limite di una successione di curve, è continua ma non derivabile.





Noi supporremo quasi sempre che $\alpha(t)$ sia una curva differenziabile: $\exists$ derivate continue di tutti gli ordini su I.

<u>Def.</u> se $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ curva regolare.

Altrimenti, un punto in cui la derivata si annulla si dice punto singolare.

$\alpha(t_0)$ t.c. $\alpha'(t_0) = 0$.

<u>Def.</u> se $\alpha(t)$ è iniettiva: curva semplice.

<u>Def.</u> $\alpha(I)$ = traccia di α.

Curve diverse possono avere la stessa traccia, parametrizzazioni diverse.

<u>Esempi</u>

- retta in $\mathbb{R}^n$ passante per $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ di direzione $\langle v \rangle$ con $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$

  $\alpha(t) = P_0 + tv$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^0 + v_1 t \\ x_2(t) = x_2^0 + v_2 t \\ \vdots \\ x_n(t) = x_n^0 + v_n t \end{cases}$$

P_0 può essere sostituito con un altro punto, v con un vettore proporzionale.

Ma anche anziché t posso prendere per es. t^3 o altre funz. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente cresc. o decrescente suriettive.

- elica circolare in $\mathbb{R}^3$

$\alpha(t) = (a\cos t, a \sin t, bt)$, a, b costanti $\neq 0$

traccia contenuta nel cilindro $x^2+y^2=a^2$

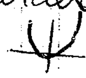
b = passo dell'elica

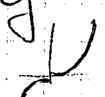
k $b=0$: circonferenza di raggio $|a|$ nel piano x,y

La curva "sale" o "scende" sull'elica a seconda che $b>0$ o $b<0$.

- cubica gobba in $\mathbb{R}^3$ e sue proiezioni in $\mathbb{R}^2$

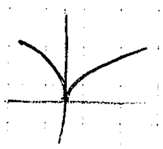
$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$: gobba perché non è contenuta in nessun piano; cubica perché è def. da polinomi di grado ≤ 3. È una curva algebrica.

Proiez. nel piano xy (t,t^2) parabola 

xz (t, t^3) 

yz (t^2, t^3) non regolare in $(0,0)$

perché $\alpha'(0) = (2t, 3t^2)(0) = (0,0)$

 cubica piana cuspidata

- cubica nodata in $\mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t^2-1, t(t^2-1))$ non è semplice perché $\alpha(1) = \alpha(-1) = (0,0)$

$\alpha'(1) = (2t, 3t^2-1)(1) = (2,2)$

$\alpha'(-1) = (-2, 2)$

Riparametrizzazione.

Se $J \xrightarrow{h} I$ è una funzione differenziabile,
$s \longrightarrow h(s)$

$\alpha \circ h : J \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n$
$s \longrightarrow h(s) \longrightarrow \alpha(h(s))$

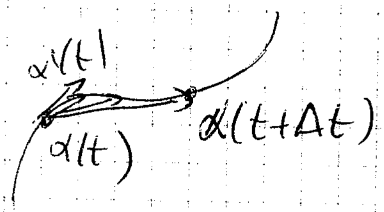
è una riparametrizzazione di α, con la stessa traccia se h è suriettiva.
Se α è regolare, non è detto che $\beta(s) = \alpha(h(s))$ lo sia:
$\beta'(s) = \alpha'(h(s))\, h'(s)$: $\alpha'(h(s))$ vettore, $h'(s)$ scalare
È regolare se $h'(s) \neq 0 \quad \forall s \in J$.

Se h è un diffeomorfismo, cioè se f è differenziabile, si parla di cambiamento di parametro e le curve α e β sono equivalenti
In particolare se considero
$h : -I \longrightarrow I$
$t \longrightarrow -t$
ottengo $\beta(t) = \alpha(-t)$: cambio orientazione ossia verso di percorrenza.
Tutte queste def. hanno origine dalla fisica, moto di un punto.
Def. $\alpha'(t)$ vettore tangente alla curva nel punto $\alpha(t)$ o vettore velocità
$a(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ punto nello

$\alpha'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ vettore nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

$\alpha'(t)$ è il limite del vettore

$\frac{1}{\Delta t}(\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t))$ per $\Delta t \to 0$



La norma di $\alpha'(t)$ è per definizione la velocità della curva in $\alpha(t)$, o all'istante t

$\|\alpha'(t)\| = v(t)$

$\|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$ prod. scalare

$= \sqrt{x_1^2(t) + \dots + x_n^2(t)}$ perché usiamo ~~la norma~~ il prod. scalare standard

Oss: La curva $\alpha(t)$ è regolare $\iff$ la velocità non è mai nulla.

3/3/2012

In ogni punto $\alpha(t_0)$ in cui la curva è regolare, è definita la retta tangente: è la retta passante per $\alpha(t_0)$ di direzione $\alpha'(t_0)$

$\gamma(t) = \alpha(t_0) + t\,\alpha'(t_0)$ o

$\gamma(u) = \alpha(t_0) + u\,\alpha'(t_0)$

La retta non cambia se riparametrizzo la curva.

In analogia con la fisica, dove lo spazio percorso è l'integrale della velocità, def. la lunghezza di una curva.

Def. I Fisso $t_0 \in I$, supp. $\alpha(t)$ curva regolare. Lunghezza dell'arco compreso tra $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ è def. come

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau \qquad (s(t_0) = 0)$$

È funzione differenziabile di t t.c.
$s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0 \ \forall t$ perché la curva è regolare: $s(t)$ è funzione crescente di t.
Se $t > t_0$ si otterrà $s(t) > 0$
se $t < t_0$ — — $s(t) < 0$
perché si tien conto del verso di percorrenza.

Giustificazione matematica della definizione di lunghezza d'arco.

Sia $\alpha(t)$ una curva in $\mathbb{R}^n$
$\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (def. su un intervallo aperto contenente $[a, b]$)

Consideriamo le poligonali inscritte, del tipo:
$P = (\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))$ dove
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < b$: partizione di $[a, b]$

La lunghezza di P è:

$$\ell(P) = \sum_{j=1}^{k} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$$ somma

delle lunghezza dei segmenti di poligonale.

Def. II
Diremo che $\alpha(t)$ è rettificabile se $\exists$ finito l'estremo sup delle lunghezze delle poligonali inscritte, detto lunghezza dell'arco di curva di estremi $\alpha(a)$, $\alpha(b)$.

Oss. Ogni poligonale inscritta ha lunghezza $\leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$, se α è di classe C^1.

Infatti:

$$\|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| = \sqrt{(x_1(t_j) - x_1(t_{j-1}))^2 + \dots + (x_n(t_j) - x_n(t_{j-1}))^2} =$$

ip. di classe C^1
$$= \sqrt{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} x_1'(t)dt\right)^2 + \dots + \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} x_n'(t)dt\right)^2} = \text{notazione}$$

$$= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha'(t) dt \right\| \underset{\substack{\text{disuguaglianza} \\ \text{triangolare}}}{\leq} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Sommando per $j = 1, \dots, k$ si ottiene
$$\ell(P) \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Teorema Se α è di classe C^1 è rettificabile e la lunghezza di α (cioè il sup delle poligonali) è proprio
$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$: voglio trovare una poligonale P t.c. $\ell(P)$ differisca da $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

per meno di ε.

Osservo che $\alpha'(t)$ è continua su $[a,b]$ e quindi è ivi uniformemente continua; perciò $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $|t-s| < \delta$ $(t, s \in [a,b])$ si ha

$$\|\alpha'(t) - \alpha'(s)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Prendo una partizione P t.c.

$$\max_j \|t_j - t_{j-1}\| < \delta.$$

Ora prendo un $j \in \{1, \dots, k\}$ e $s \in [t_{j-1}, t_j]$.
fissato

Avrò allora:

$$\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha'(t)\,dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\alpha'(s) + (\alpha'(t) - \alpha'(s))]\,dt =$$

$$= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha'(s)\,dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\alpha'(t) - \alpha'(s))\,dt =$$

$$= (t_j - t_{j-1})\,\alpha'(s) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\alpha'(t) - \alpha'(s))\,dt.$$

Allora:

(*) $\|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$ è la norma di quella somma

Oss. che vale:

$$\|v + w\| \geq \|v\| - \|w\|.$$

Infatti

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle$$

$$(\|v\| - \|w\|)^2 = \|v\|^2 - 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2$$

coverso di v e w

$$\|v\|\,\|w\|\cos\vartheta + \|v\|\,\|w\| = \|v\|\,\|w\|(\cos\vartheta + 1) \geq 0$$

da cui si ottiene la disuguaglianza

$$\|v+w\| \geq \big|\,\|v\| - \|w\|\,\big| \geq \|v\| - \|w\|.$$

Applico a $(*)$:

$$\|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \geq (t_j - t_{j-1})\|\alpha'(s)\| - \left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j} (\alpha'(t) - \alpha'(s))\,dt\right\| \geq$$

disug. triang. $$\geq (t_{j} - t_{j-1})\|\alpha'(s)\| - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(t) - \alpha'(s)\|\,dt \geq$$

$$\geq (t_j - t_{j-1})\|\alpha'(s)\| - \frac{\varepsilon}{b-a}(t_j - t_{j-1})$$

Perciò, dividendo per $t_j - t_{j-1}$:

$$\frac{\|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|}{t_j - t_{j-1}} \geq \|\alpha'(s)\| - \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Integrando risp. a s su $[t_{j-1}, t_j]$ si ottiene

$$\|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(s)\|\,ds - \frac{\varepsilon}{b-a}(t_j - t_{j-1}).$$

Ora sommiamo su $j = 1, \dots, k$:

$$\ell(P) \geq \int_a^b \|\alpha'(s)\|\,ds - \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Quindi la I def. è giustificata.

Quindi, fissato $t_0 \in (a, b)$, rimane def. la funzione lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

$s(t)$ è funzione crescente di $t \Rightarrow \exists$ la funzione inversa $t(s)$ t.c.

$$t'(s)\Big|_{s=s(t)} = \frac{1}{s'(t)}.$$

Attenzione: non è detto che $t(s)$ sia esprimibile in termini di funzioni elementari.

$$\big(t(s(t)) = t \Rightarrow t'(s(t))\, s'(t) = 1 \big)$$

Possiamo riparametrizzare $\alpha(t)$:

$$\begin{array}{ccccc} J & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ s & \longrightarrow & t(s) & \longrightarrow & \alpha(t(s)) =: \beta(s) \end{array}$$

e si avrà $\beta'(s) = \alpha'(t(s))\, t'(s)$ con

$$\|\beta'(s)\| = |t'(s)|\, \|\alpha'(t(s))\|$$

Ma $\frac{ds(t)}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ quindi

$$= |t'(s)|\, \|s'(t)\| = 1$$

perciò $\beta'(s)$ è un versore.

Il nuovo parametro s (che misura la lunghezza dal punto iniziale t_0) è detto parametro naturale o ascissa curvilinea.

Esempi

- retta

$\alpha(t) = P_0 + v t \quad , \quad \alpha'(t) = v$ costante

$\|\alpha'(t)\| = \|v\|$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|v\| d\tau = \|v\|(t - t_0) = \|v\| t - \|v\| t_0$$

$$t(s) = (s + \|v\| t_0) \frac{1}{\|v\|} = \frac{s}{\|v\|} + t_0$$

$$\beta(s) = \underbrace{P_0 + t_0 v}_{Q} + \frac{v}{\|v\|} s$$

- elica circolare

$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$

$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ costante

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2+b^2} \, d\tau = (t - t_0) \sqrt{a^2 + b^2}$$

$t_0 = 0$ $\qquad = \sqrt{a^2+b^2} \, t$

$t(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} s \qquad$ pongo $c = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right)$$

• cubica gobba

$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1+4\tau^2+9\tau^4}\, d\tau$$

|| Ogni curva regolare può essere riparametrizzata con parametro naturale. ||

Ci concentreremo sul caso delle curve in $\mathbb{R}^3$; quelle in $\mathbb{R}^2$ sono un caso particolare (nel piano $z=0$).

<u>Richiami sulle operazioni tra vettori in $\mathbb{R}^3$.</u>

Dati $v(v_1, v_2, v_3)$ e $w(w_1, w_2, w_3)$ in $\mathbb{R}^3$, def.

$v \wedge w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, -(v_1 w_3 - v_3 w_1), v_1 w_2 - v_2 w_1)$

~~minori (con segno)~~ di $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$

prodotto vettoriale o esterno

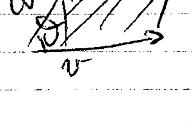
Si ha:

1) $\langle v, v \wedge w \rangle = \langle w, v \wedge w \rangle = 0$

e perciò $v \wedge w$ è ortogonale a v e w (o nullo!)

2) $v \wedge w = 0 \iff v$ e w sono lin. dip.

3) $\|v \wedge w\|$ = area del parallelogramma costruito sui due vettori.



Infatti:

ricordiamo che l'angolo convesso ϑ di v e w è
l'unico angolo $0 \leq \vartheta \leq \pi$ t.c. $\cos\vartheta = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\|v\| \, \|w\|} =$

$= \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}$ (Cauchy-Schwarz)

Detta A l'area del parallelogramma, si ha
$A^2 = \|v\|^2 \left(\|w\|^2 \sin^2\vartheta \right) =$
$= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)(1 - \cos^2\vartheta)$

D'altra parte

- $\|v \wedge w\|^2 = (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 +$
$+ (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 =$

(1) $= v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_2^2 + v_1^2 w_2^2 + v_3^2 w_1^2 + v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_1^2 -$
$- 2 v_2 w_3 v_3 w_2 - 2 v_1 v_3 w_1 w_3 - 2 v_1 v_2 w_1 w_2$

- $1 - \cos^2\vartheta = \frac{(v_1^2 + \dots)(w_1^2 \dots) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2}{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)}$

- $A^2 = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2$ (3)
$= \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$

Ora basta confrontare (1) e (3)

4) Se v, w sono lin. ind. p., allora
$(v, w, v \wedge w)$ è una base concorde con
la base canonica (e_1, e_2, e_3).
Infatti la matrice delle coordinate di
$(v, w, v \wedge w)$ risp. a (e_1, e_2, e_3) è

$$\left|\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \end{matrix}\right| = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2 > 0$$: è proprio

la (norma)^2 $\|v \wedge w\|^2 = A^2$.

Prodotto scalare o interno canonico:

$\langle v, w \rangle$ (opp. $v \cdot w$)

$\shortparallel$

$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

È $0 \iff v \perp w$ perché

$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \, \|w\| \cos \vartheta$

(incluso il caso $v = 0$ opp. $w = 0$)

Oss $\frac{d}{dt}\langle v(t), w(t) \rangle = \langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle$.

Prop. (facile ma importante)

Sia $v(t)$ una funz. differenziabile

$v(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. $v(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots)$

Se $\|v(t)\|$ è costante $\Rightarrow v'(t)$ è ortog. a $v(t)$ $\forall t \in I$.

Dim. $\|v(t)\|^2 = \langle v(t), v(t) \rangle = x_1(t)^2 + \dots + x_n(t)^2$

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), v(t) \rangle = 2x_1(t)x_1'(t) + \dots + 2x_n(t)x_n'(t)$$
$$= 2\langle v(t), v'(t) \rangle.$$

Essendo $\|v(t)\| =$ costante $\Rightarrow$ anche $\|v(t)\|^2$ è cost $\Rightarrow$ la derivata è id. nulla $\Rightarrow \langle v(t), v'(t) \rangle = 0$ $\forall t \in I$.

D'ora in poi curve in $\mathbb{R}^3$.

Sia $\beta(s): I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva diff. reg. con s param. naturale

Allora $\|\beta'(s)\| = 1$.

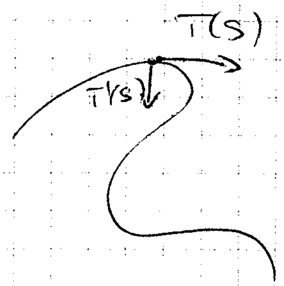
<u>Def.</u> <u>versore tangente</u> a β in s $\quad \beta'(s) =: T(s)$ (o $T_\beta(s)$).

Se riparametrizzo con $-s$ $\Rightarrow T(s)$ cambia segno.

Essendo $T(s) = \beta'(s)$ di norma costante 1, si avrà:

$T'(s) = \beta''(s)$ ortogonale a $T(s)$ (o nullo)

vettore accelerazione: misura quanto rapidamente β cambia direzione (la velocità ha norma costante)



<u>Def.</u> <u>curvatura</u> di β in $\beta(s)$

$k(s) = \|T'(s)\| = \|\beta''(s)\|$ funz. diff. di s

Si ha sempre $k(s) \geq 0$.

Def. Un punto $\beta(s_0)$ t.c. $k(s_0) = 0$ è detto flesso, o singolarità del 1° ordine.

Def. $\beta(s)$ regolare è detta <u>biregolare</u> se $\beta''(s) \neq 0 \ \forall s$: non ha flessi

<u>Prop.</u> le rette come curve a curvatura nulla.

una curva $\beta(s)$ param. con param. nat. ha curvatura $k(s) \equiv 0$ se e solo se è un segmento di retta

Dim. $\beta(s) = P + v\,s$, retta con $\|v\| = 1$,
v costante

Allora $\beta'(s) = v$

$\beta''(s) \equiv 0$

Vicev. se $\beta''(s) \equiv 0 \Rightarrow \beta'(s) = v$ costante
$\Rightarrow \beta(s) = v\,s + c$: rette.

— - —

Triedro fondamentale in un punto non di flesso.

$\beta(s)$

$T(s)$, supp. $\boxed{k(s) > 0 : \beta(s) \text{ non flesso}}$

Def. $n(s) = \dfrac{1}{k(s)} T'(s)$ versore normale

$$= \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|}$$

$T'(s) = k(s)\,n(s)$

Piano osculatore è quello generato da $T(s)$ e $n(s)$ in $\beta(s)$ (vettoriale), oppure affine:
$\beta(s) + \langle T(s), n(s) \rangle$.

Def. Versore binormale:
$b(s) = T(s) \wedge n(s)$: è ortogonale al piano osculatore.
$T(s), n(s), b(s)$ terna ortonormale positiva, triedro fondam. def. al variare di s in I.
Piano normale: $\langle n(s), b(s) \rangle$, è $\perp T(s)$
" rettificante: $\langle T(s), b(s) \rangle$, è $\perp n(s)$

Ho così un riferimento mobile (metodo di Cartan), detto anche di Frenet.

<u>Formule di Frenet</u>.

Esprimono le derivate di $T(s)$, $n(s)$, $b(s)$ in funz. della base stessa $T(s), n(s), b(s)$, sotto l'ip. che $\beta(s)$ sia biregolare.

1) $T'(s) = k(s)\, n(s)$ $\quad (T' = kn)$

2) $b'(s)$ è parallelo a $n(s)$: infatti

- $b' \perp b$ perché b è un versore
- $b' \perp T$: perché si ha

$\langle b, T \rangle = 0 \quad \forall s$; derivo e ottengo

$$0 = \langle b', T \rangle + \langle b, T' \rangle =$$
$$= \langle b', T \rangle + \langle b, kn \rangle =$$
$$= \langle b', T \rangle + k \underbrace{\langle b, n \rangle}_{0} = \langle b', T \rangle = 0$$

$\Rightarrow b' \perp T$.

Allora b' è ortog. al piano rettificante, quindi è $\parallel n$.

<u>Def</u>: la funzione <u>torsione</u> $\tau(s)$ ponendo
$$b'(s) = \tau(s)\, n(s)$$
(anche q. è diff., def. dal quoz. di una coord. di $b'(s)$ risp. alla stessa coord. di $n(s)$, supposta non nulla.)

<u>Oss</u> che $\tau(s)$ è def. se $\beta(s)$ ~~~~ flesso, cioè se $k(s) \neq 0$.

$\tau(s)$ misura di quanto la curva si allontana dal piano osculatore.
Può essere >0, <0, $=0$.

3) Calcolo di $n'(s) = -kT - \tau b$:

$n = b \wedge T \Rightarrow$

$n'(s) = b' \wedge T + b \wedge T' =$ (verif. la formula nelle componenti.)

$= (\tau n) \wedge T + b \wedge (kn) =$

$= \tau(-b) + k(-T) = -kT - \tau b.$

$$\begin{pmatrix} T' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

(T', n', b' sono lin. dip.)

<u>Esempio</u>

Elica con param. naturale

$$p(s) = \left(a \cos\frac{s}{c},\ a \sin\frac{s}{c},\ b\frac{s}{c} \right) \quad \text{con } c = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$T(s) = p'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c} \right)$$

$$T'(s) = p''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0 \right)$$

$$k(s) = \| T'(s) \| = \frac{a}{c^2} = \cancel{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\ \frac{a}{a^2+b^2}$$

costante

$k\ b = 0$, af $\Rightarrow k = \frac{1}{a}$.

$$n(s) = \frac{1}{k} T'(s) = \left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0 \right)$$

orizzontale, punta verso l'asse del cilindro

$$b(s) = T \wedge n = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & +\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cancel{\frac{a}{a c^2}}\cos\frac{s}{c} & -\cancel{\frac{a}{a c^2}}\sin\frac{s}{c} & 0 \end{pmatrix}$$ (verif. che è versore)

$$b'(s) = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0 \right) = \tau \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0 \right)$$

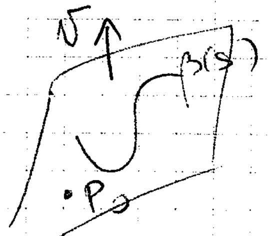
$$\Rightarrow \tau = -\frac{b}{c^2} = \frac{-b}{a^2+b^2} \text{ cost } \neq 0 \text{ se } b \neq 0$$

Curve a torsione identicam. nulla.

Prop Sia $k(s) \neq 0 \ \forall s$ ovvia $\beta(s)$ curva biregolare (s param. naturale). Allora $\beta(s)$ è piana $\Leftrightarrow \tau \equiv 0$.

Dim.

Supp. $\beta(s) \in \pi$ = piano per P_0 ortog. a $\underset{\text{cost}}{v}$ $\forall s \in I$.



Allora $(\beta(s) - P_0) \perp v \quad \forall s$

$\Rightarrow \langle \beta(s) - P_0, v \rangle = 0$.

Derivo: $\langle \beta'(s), v \rangle = 0 \qquad v \perp \beta'(s) = T(s)$

$\langle \beta''(s), v \rangle = 0$

$\langle k n(s), v \rangle = k \langle n(s), v \rangle$

Ma $\boxed{k \neq 0} \Rightarrow v \perp n(s)$

Allora $v \parallel b(s) \quad \forall s$.

Quindi $\forall s \quad b(s) = \begin{cases} \frac{v}{\|v\|} & \text{opp.} \\ -\frac{v}{\|v\|} \end{cases}$

Ma $b(s)$ è cont. su un intervallo $\Rightarrow$

$b(s)$ è costante.

Allora $b'(s) = 0 = \tau n(s) \Rightarrow \tau \equiv 0$.

Viceversa: se $\tau \equiv 0 \Rightarrow b'(s) = 0$ Frenet.

$\Rightarrow b(s) = b_0$ costante
$= b(s_0)$.

Sia π il piano per $\beta(s_0)$ ortog. a b_0:
dim. che $\beta(s) \subseteq \pi$.

Sia $f(s) = \langle \beta(s) - \beta(s_0), b_0 \rangle$

$f'(s) = \langle \beta'(s), b_0 \rangle =$

$= \langle \underset{n}{T(s)}, b_0 \rangle = \langle T(s), b(s) \rangle = 0$

$\Rightarrow f(s)$ è costante, ma $f(s_0) = 0$

quindi OK.

— . —

Cambio orientazione di β:

$\beta(s)$	$\gamma(s) = \beta(-s)$
$T(s) = \beta'(s)$	$\gamma'(s) = -\beta'(-s) = -T(-s) = T_\gamma(s)$
$\beta''(s)$	$\gamma''(s) = \beta''(-s)$: normalizzo
$n(s)$	$n_\gamma(s) = n(-s)$
$b = T \wedge n$	$b_\gamma = T_\gamma \wedge n_\gamma =$
	$= -T(-s) \wedge n(-s) =$
	$= -b(-s)$
	$b'_\gamma(s) = b'(-s)$
$\underline{k(s) = k_\gamma(s)}$,	$\tau_\gamma(s) = +\tau(s)$ $\underline{\text{invariato}}$

$\boxed{\text{Forma canonica locale}}$ $\boxed{\text{Taylor}}$ comp. per comp.

$$\beta(s) = \beta(0) + s\beta'(0) + \frac{s^2}{2}\beta''(0) + \frac{s^3}{6}\beta'''(0) + R(s)$$

$$= \beta(0) + sT(0) + \frac{1}{2}s^2 k(0) n(0) + \frac{s^3}{6}\left[k' n + k(-kT - \tau b)\right] + R(s)$$

$$\Rightarrow \beta(s) = \beta(0) + \left(s - k^2\frac{s^3}{6}\right)T + \left(\frac{s^2}{2}k + \frac{s^3 k'}{6}\right)n - \left(\frac{k\tau s^3}{6}\right)b + R(s)$$

Approssimazione di Frenet:

$\underline{\text{I}}$ ordine: $\beta(0) + sT(0)$ retta tangente

$\underline{\text{II}}$ ordine: $\beta(0) + sT(0) + k_0\frac{s^2}{2}n(0)$

conica osculatrice contenuta nel piano osculatore $\langle T(0), n(0)\rangle$ in $\beta(0)$

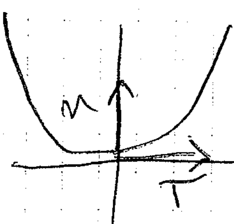
Scelgo un rif. cart. in cui $\beta(0) = (0,0,0)$, $T(0) = (1,0,0)$, $n(0) = (0,1,0)$, $b(0) = (0,0,1)$

Piano osc.: $z = 0$; retta tang. $y = z = 0$

Piano rettif. $y = 0$.

conica approssimante diretta nel piano xy:

$$\begin{cases} x = s \\ y = \frac{k_0}{2}s^2 \end{cases} \qquad y = \frac{k_0}{2}x^2 \quad \text{parabola}$$



Poiché $k_0 > 0$, per s piccolo $y > 0$

$\beta(s)$ sta dalla parte del piano rettif. $y = 0$ in cui punta n:

questo è il signif. geom. del verso di n.

3° ordine:

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{k^2 s^3}{6} \\ y(s) = \frac{s^2}{2} k + \frac{s^3 k'}{6} \\ z(s) = -\frac{k \tau s^3}{6} \end{cases}$$

$z(s)$ è funz. cresc. di s se $\tau < 0$

decresc. di s se $\tau > 0$

$\Rightarrow$ per $\tau < 0$ la curva attraversa il piano osculatore nella direz. delle s crescenti.

<u>Circolo osculatore</u>

È un'altra curva approssimante $\beta(s)$, al 2° ordine.

<u>Oss</u> che una cf di centro $C \in \mathbb{R}^3$ e raggio r, contenuta in un piano π, ammette una parametrizzaz. in ascissa curvilinea del tipo:

$$\gamma(s) = C + r \cos\frac{s}{r}\, e_1 + r \sin\frac{s}{r}\, e_2$$

dove (e_1, e_2) è una base ortonormale di π.

<u>Prop</u> Se $\beta(s)$ è una curva reg. in ascissa curvilinea s, con $k(s) > 0$ $\forall s$, allora $\exists !$ cf $\gamma(s)$ che approssima β in un punto fissato $\beta(0)$ al 2° ordine: ossia

$\beta(0) = \gamma(0)$, $\beta'(0) = \gamma'(0)$, $\beta''(0) = \gamma''(0)$.

γ è contenuta nel piano osculatore e si chiama circolo osculatore a β in $\beta(0)$.

Il suo centro è detto <u>centro di curvatura</u>, e il suo raggio <u>raggio di curvatura</u> di β in $\beta(0)$.

<u>Dim.</u>

Se $\gamma(s) = C + r\cos\frac{s}{r}\, e_1 + r \sin\frac{s}{r}\, e_2$,

$$\gamma(0) = C + r e_1$$

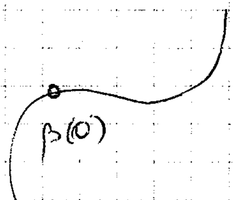
$$\gamma'(s) = -\sin\frac{s}{r}\, e_1 + \cos\frac{s}{r}\, e_2$$

$$\gamma'(0) = e_2$$

$$\gamma''(s) = -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\, e_1 - \frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\, e_2$$

$$\gamma''(0) = -\frac{1}{r}\, e_1$$

Dobbiamo avere
$$\gamma(0) = \beta(0) = C + r e_1$$
$$\gamma'(0) = e_2 = \beta'(0) = T(0)$$
$$\gamma''(0) = -\frac{1}{r} e_1 = \beta''(0) = k(0)\, n(0)$$



Perciò deve essere: $e_2 = T(0)$

$$\|\gamma''(0)\| = \frac{1}{r} = \overset{k_0}{\overset{\shortparallel}{k(0)}} > 0$$

$$e_1 = -n(0)$$

$$C = \beta(0) - r e_1 = \beta(0) + \frac{1}{k_0} n(0)$$ centro di curvat.

e perciò
$$\gamma(s) = \left(\beta(0) + \frac{1}{k_0} n(0)\right) - \frac{1}{k_0}\cos(k_0 s)\, n(0) + \frac{1}{k_0}\sin(k_0 s)\, T(0).$$

Raggio di curvatura è $r = \frac{1}{k_0}$.

<u>Oss.</u> In generale $\gamma'''(0) \neq \beta'''(0)$ cioè il cerchio non è iperosculatore.

$$\gamma'''(s) = +\frac{1}{r^2}\sin\frac{s}{r}\, n(0) - \frac{1}{r^2}\cos\frac{s}{r}\, T(0) =$$

$= k_0^2 \sin(k_0 s)\, n(0) - k_0^2 \cos(k_0 s) T(0)$

$\gamma'''(0) = -k_0^2 T(0)$

sono di gen. diversi

$\beta''(s) = k(s) n(s)$

$\beta'''(s) = k' n + k n'$
$= k' n - k^2 T - k \tau b$

$\beta'''(0) = k'(0) n(0) - k_0^2 T(0) - k_0 \tau_0 b_0$

Curve a velocità qualunque.

$\alpha(t)$ curva regolare

$v(t)$ velocità $\qquad s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| d\tau$

$\|\alpha'(t)\| = s'(t) > 0, \quad t'(s) = \frac{1}{v(t(s))} > 0$

$\beta(s) = \alpha(t(s))$

$T(s) = \beta'(s) = \alpha'(t(s))\, t'(s)$: vettori paralleli con lo stesso verso

$\cancel{= \frac{1}{v} \alpha'}$

$(*)\ T(t) = T(s(t)) = \beta'(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{v(t)}$ $\quad \alpha'$ normalizzato

$\frac{d}{dt} T(t) = T'(s(t)) s'(t) = k(t) n(t) v(t) = k(v\, n)$
$= v(k n)$

$[\ T'(t) = v(kn)$ analogo della I form. di Frenet

$b'(s) = \tau n$

$b(t) = b(s(t))$

$b'(t) = b'(s(t)) s'(t) = v(\tau n)$ $\quad$ tutto moltiplicato per v

$n'(s) = -kT - \tau b$

$n'(t) = -k\, vT - \tau\, v b$

Calcolo dell'apparato di Frenet.

$\alpha(t)$ $\qquad \|\alpha'(t)\| = v(t)$

$\alpha'(t) \underset{\text{da}(*)}{=} v(t)\,T(t)$ e quindi $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ (1)

versore tg in $\alpha(t)$

$$\alpha''(t) = v'T + vT'$$
$$= v'T + v(vkn) = v'T + \underbrace{v^2 k}_{\geq 0}\, n \in \langle T, n\rangle$$

quindi $\alpha''(t) \in$ piano osculatore e
Essendo il coeff di n uguale a v^2k, e
~~bacha~~ essendo T parallelo a α', si
ha che α'' e T sono lin. indip. $\Leftrightarrow$

$\boxed{\alpha' \text{ e } \alpha'' \text{ sono lin. indip.} \Leftrightarrow k > 0 \Leftrightarrow \alpha(t) \text{ non è flesso.}}$

In tal caso α', α'' generano il piano osculatore.

$$\alpha' \wedge \alpha'' = vT \wedge (v'T + v^2 k n) =$$
$$= (vv')\underbrace{\cancel{T \wedge T}}_{=0} + \underbrace{v^3 k}_{>0}(T \wedge n)$$

$\Rightarrow \alpha' \wedge \alpha''$ ha direzione e verso di b, perciò

$b(t) = \dfrac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$ (2)

Infine $\quad n(t) = b(t) \wedge T(t)$ (3)

Posso anche calcolare $k(t)$:

$\alpha' \wedge \alpha'' = v^3 k\, b \quad \Rightarrow \|\alpha' \wedge \alpha''\| = v^3 k$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{v^3} = \dfrac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$ (4)

Per calcolare τ, calcoliamo prima $\alpha'''(t)$:

$$\alpha'''(t) = v''T + v'T' + (v^2k)'n + v^2kn' =$$
$$= v''T + v'(vkn) + (v^2k)'n + v^2k(-kvT - \tau v b)$$

Ora ~~$\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha$~~ il prodotto misto

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle =$$

$$= \langle \|\alpha' \wedge \alpha''\| b, \alpha''' \rangle =$$ conta solo la comp. di α''' di direz. b

$$= \langle \|\alpha' \wedge \alpha''\| b, -v^3 k \tau b \rangle =$$

$$= \langle k v^3 b, -k \tau v^3 b \rangle =$$

$$= -k^2 v^6 \tau$$

$$\Longrightarrow \tau = -\frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{k^2 v^6} = -\frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \quad 5$$

Cor: α priva di flessi
α è piana $\Longleftrightarrow (\alpha', \alpha'', \alpha''') = 0$
$\Longleftrightarrow \alpha', \alpha'', \alpha'''$ sono lin. dipendenti.

Esempio 1. cubica gobba

$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

$\alpha' = (1, 2t, 3t^2)$

$\alpha'' = (0, 2, 6t)$

$\alpha''' = (0, 0, 6)$

$v(t) = \sqrt{1+4t^2+9t^4} = \|\alpha'\|$

$$T = \frac{(1, 2t, 3t^2)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

$\alpha' \wedge \alpha'' = (12t^2 - 6t^2, -6t, 2) = (6t^2, -6t, 2) =$

$= 2(3t^2, -3t, 1)$

$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = 2\sqrt{9t^4+9t^2+1}$

$$b = \frac{\cancel{2}(3t^2, -3t, 1)}{\cancel{2}\sqrt{9t^4+9t^2+1}} \qquad \begin{pmatrix} 3t^2 & -3t & 1 \\ 1 & 2t & 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$n = b \wedge T = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}\sqrt{1+9t^2+9t^4}} (-9t^3-2t, 1-9t^4, 6t^3+3t)$$

$$k = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$$

$$(\alpha' \wedge \alpha'', \alpha''') = 12$$

$$\tau = -\frac{\cancel{12}\,3}{\cancel{4}(9t^4+9t^2+1)} = \frac{-3}{1+9t^2+9t^4}$$

Es. in $\alpha(0)$ $k = 2$, $\tau = -3$,

$T(0) = (1,0,0)$, $n(0) = (0,1,0)$, $b(0) = (0,0,1)$

~~Piano~~ Esempio 2.

$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ risulta $k = -\tau$.

— · —

Curve in $\mathbb{R}^2$ $\qquad \alpha(t): I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Alla curvatura si può dare un segno.

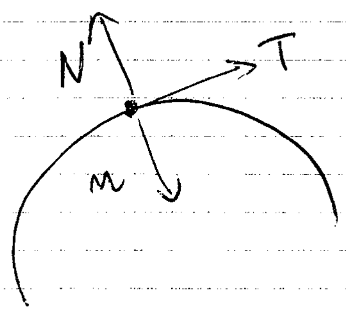
Infatti $\alpha'(t)$ determina $T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$

Rimane def. $N(t) =$ versore ortog. a T

t.c. la coppia $(T, N) \sim (e_1, e_2)$.

D'altra parte $\alpha''(s) = k\,n = \tilde{k} N$

$\tilde{k}$ curvatura piana di α è $\pm k$.

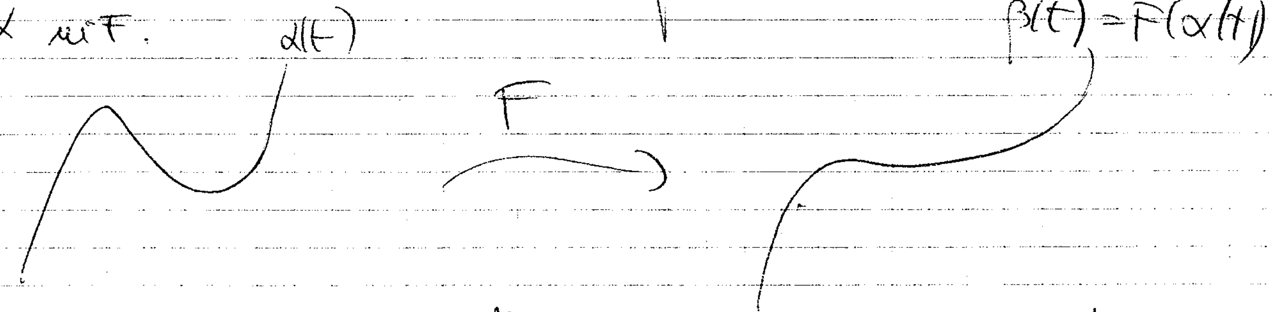


$\tilde{k} < 0$

Differenziale di una mappa $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

$F = (f_1, \dots, f_m)$, dove ogni f_i è una funzione reale di n variabili reali.
Supp. che F sia differenziabile, cioè esistono derivate parziali di tutti gli ordini:
(F in gen. sarà def. su tutto $\mathbb{R}^n$ o su un suo aperto U)

Se $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare, ha senso considerare $\beta = F \circ \alpha$, immagine di α in F.



Considero $\forall P \in \mathbb{R}^n$, lo spazio tangente a $\mathbb{R}^n$ in P: $T_P\mathbb{R}^n$ = spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dove i vettori sono pensati applicati in P, spazio dei vettori tangenti a $\mathbb{R}^n$ in P.

A F si può associare il suo differenziale in P

$$d_PF : T_P\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(P)}\mathbb{R}^m$$
$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

così def.: d_PF è l'appl. lineare avente come matrice associata risp. alle basi canoniche la matrice jacobiana di F in P

$$JF(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix} \quad m \times n$$

$$v(v_1, \dots, v_n) \xrightarrow{d_P F} d_P F(v) = JF(P) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P)v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P)v_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P)v_n,$$

$$- - - -$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P)v_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P)v_n\Big)$$

$$= (v[f_1], \dots, v[f_m])$$

derivate direzionali di $f_1, \dots, f_m$ risp. a v

Prop. $\alpha(t)$ curva regolare, t param. qque
$d_{\alpha(t)}F$ manda il vettore tang $\alpha'(t)$ nel punto $\alpha(t)$ nel vettore tang $\beta'(t)$ ai punti corrispondenti, ossia

$$d_{\alpha(t)}F(\alpha'(t)) = \beta'(t) \qquad (\text{dove } \beta(t) = F(\alpha(t)))$$

Dim. Sia $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$(d_{\alpha(t)}F)(v) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\alpha(t))v_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\alpha(t))v_n, \dots \Big)$$

In particolare:

$$d_{\alpha(t)}(F)(\alpha'(t)) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t))x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\alpha(t))x_n'(t), \; - - - - \Big) =$$

$$\beta'(t) = \frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}(f_1(\alpha(t)), \dots, f_n(\alpha(t))) =$$

$$= \cancel{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} (x_1(t), \dots, x_n(t))\, x_1'(t) \right.}$$

$$= \left(\frac{d}{dt} f_1(\alpha(t)), \dots, \frac{d}{dt} (f_n(\alpha(t)) \right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt} f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, \frac{d}{dt} f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} (\alpha(t))\, x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (\alpha(t))\, x_n'(t), \dots \right)$$

che coincide con $d_{\alpha(t)} F(\alpha'(t))$.

Oss. in generale non è vero che $d_{\alpha(t)} F(\alpha''(t))$ sia uguale a $\beta''(t)$.

Infatti

$$d_{\alpha(t)} F(\alpha''(t)) = J F(\alpha(t)) \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ \vdots \\ x_n''(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} (x_1(t), \dots, x_n(t))\, x_1''(t) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (x_1(t), \dots, x_n(t))\, x_n''(t), \dots \right)$$

Invece $\beta''(t) = \frac{d}{dt} \beta'(t) =$

$$\left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} (\alpha(t))\, x_i'(t)\, x_j'(t) + \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} (\alpha(t))\, x_i''(t), \dots \right)$$

Non sono uguali perché in $\beta''(t)$ compaiono le derivate seconde di $f_1, \dots, f_n$.

Se F è un'affinità $\boxed{\text{le } f_i}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sono nulle (F è def. da polinomi di 1° grado). $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}^n$

$F(x_1, \dots x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B$, dove $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

A è una matrice $n \times n$ con $\det A \neq 0$.
A è la matrice dell'applicazione lineare soggiacente F,
$J F(P) = A$ qualunque sia P, e

$d_P F$ è l'appl. lin. def. da A $d_P F : T_P \mathbb{R}^n \to T_P \mathbb{R}^n$.

Torniamo a $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Ci interessa il caso in cui F è un'isometria di $\mathbb{R}^3$, cioè F conserva le distanze.
Questo accade $\iff$ F è un'affinità t.c. l'appl. lin. soggiacente è un'isometria vettoriale $\iff$ A è una matrice ortogonale $\iff$ $d_P F$ conserva prod. scal. e norma dei vettori.

Isom. diretta $\iff$ $|A| = 1$

" inversa $\iff$ $|A| = -1$

Teorema

Sia $\alpha(s)$ curva in $\mathbb{R}^3$, s ascissa curvilinea.
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'isometria, $F = AX + B$.
Sia $\beta(s) = F(\alpha(s))$ e $P_0 = \alpha(0)$.
Si ha: $d_{P_0} F(T_\alpha(P_0)) = T_\beta(F(P_0))$

$d_{P_0} F(n_\alpha(P_0)) = n_\beta(F(P_0))$

$k_\alpha(P_0) = k_\beta(F(P_0))$

Mentre invece: $d_{P_0} F(b_\alpha(P_0)) = (\operatorname{sgn} F)\, b_\beta(F(P_0))$

$\tau_\alpha(P_0) = (\operatorname{sgn} F)\, \tau_\beta(P_0)$.

Dim. s è param. nat. $\Rightarrow$ $T_\alpha(s) = \alpha'(s)$

$$dF_{\alpha(0)}(T_\alpha(0)) = T_{\alpha(0)}F(\alpha'(0)) = \beta'(0)$$

(già dim.) Ma F isom. $\Rightarrow$ $dF_{\alpha(0)}$ conserva la norma $\Rightarrow \|\beta'(0)\| = 1$ e s è param. nat. anche per la curva trasformata $\beta(s)$.

Perciò $dF_{\alpha(0)}(T_\alpha) = T_\beta$.

Inoltre $dF(\alpha''(s)) = \beta''(s)$ perché F è lineare. Perciò

$$dF(k_\alpha n_\alpha) = k_\beta n_\beta \quad \text{e}$$

$$\|k_\alpha n_\alpha\| = k_\alpha = \|dF(k_\alpha n_\alpha)\| = \|k_\beta n_\beta\| = k_\beta$$

e quindi anche $dF_{\alpha(0)}(k_\alpha n_\alpha) =$

perché dF è lineare $= k_\alpha \, dF_{\alpha(0)}(n_\alpha) = k_\beta n_\beta = k_\alpha n_\beta$

$\Rightarrow dF(n_\alpha) = n_\beta$.

Supp. ora $|A| = 1$: allora la base (Ae_1, Ae_2, Ae_3) è concorde con (e_1, e_2, e_3) base can.; così pure $(AT_\alpha, An_\alpha, Ab_\alpha)$ è concorde con $(T_\alpha, n_\alpha, b_\alpha)$ e quindi con (e_1, e_2, e_3)

$(T_\beta, n_\beta, Ab_\alpha)$

Segue che $Ab_\alpha = b_\beta$ ($dF(b_\alpha)$ è un versore ortog. a T_β e n_β perché dF conserva norma e angoli)

Se invece $|A| = -1$, dF rovescia l'orientazione e quindi: $dF(b_\alpha) = -b_\beta$.

$dF_{\alpha(s)}(b_\alpha'(s)) = b_\beta'(s)$: da ciò segue l'affermazione sul segno della torsione nei punti corrispondenti.

Teorema fondamentale della teoria locale delle curve.

1) Date 2 funzioni $k(s)$ e $\tau(s)$: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo in $\mathbb{R}$) differenziabili e con $k(s) > 0$ $\forall s \in I$, $\exists$ una curva regolare $\alpha(s)$: $I \to \mathbb{R}^3$, con param. naturale, t.c. $k(s)$ e $\tau(s)$ sono curvatura e torsione di α.

2) Se $\alpha, \bar{\alpha}$ sono curve regolari $I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\bar{k} = k$ e $\bar{\tau} = \pm\tau$, allora α e $\bar{\alpha}$ sono congruenti, cioè differiscono per un'isometria di $\mathbb{R}^3$.

Dim.
Esistenza.
1) Le formule di Frenet danno luogo a un sist. di 9 equazioni diff. nelle 9 incognite $T_1, T_2, T_3, n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, b_3$, componenti di T, n, b.

$$\begin{cases} T' = kn \\ n' = -kT - \tau b \\ b' = \tau n \end{cases}$$

Fissate le cond. iniz. $T(s_0), n(s_0), b(s_0)$

$T(s), n(s), b(s)$.
Poi considero l'ulteriore equaz. diff.:
$\alpha'(s) = T(s)$, nella funz. incognita
$\alpha(s)$: 1! soluz. fissato $\alpha(s_0)$.

2) Unicità.
Supp. $\alpha(s)$ e $\bar{\alpha}(s)$ siano 2 curve regolari def. su I con s param. naturale, t.c.
$k(s) = \bar{k}(s) > 0$ e $\tau(s) = \bar{\tau}(s)$ $\forall s \in I$.

Fissiamo un $s \in I$, per esempio $s=0$, consid. $\alpha(0)$ e $\bar{\alpha}(0)$ e i 2 triedri di Frenet: T_0, n_0, b_0 e $\bar{T}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0$.
Allora $\exists!$ isomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.
φ manda T_0 in $\bar{T}_0$, n_0 in $\bar{n}_0$ e b_0 in $\bar{b}_0$.
φ è nec. un'isom. vettoriale perché manda una base ortonorm. in una base ortonorm. (quindi la matrice è ortogonale). Inoltre $\det \varphi = 1$ perché le 2 basi sono entrambe positive.
Allora $\exists!$ isometria $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente φ come appl. lineare soggiacente, t.c. $F(\alpha(0)) = \bar{\alpha}(0)$. In particolare $d_pF = \varphi$ $\forall p \in \mathbb{R}^3$.
Sia $\beta = F(\alpha(s))$: vogliamo dim. che $\beta = \bar{\alpha}$.
Oss. che si ha:

$$\left.\begin{aligned} T_\beta(s) &= \varphi(T(s)) \\ n_\beta(s) &= \varphi(n(s)) \\ b_\beta(s) &= \varphi(b(s)) \\ k(s) &= k_\beta(s) \\ \tau(s) &= \tau_\beta(s) \end{aligned}\right\} \quad \forall s \in I$$

$\beta(s)$ e $\bar{\alpha}(s)$ hanno: $\beta(0) = \bar{\alpha}(0)$ e che in tale punto hanno lo stesso triedro di Frenet : $T_\beta(0) = \varphi(T(0)) = \varphi(T_0) = \bar{T}_0$

$n_\beta(0) \quad - \quad - \quad - \quad = \bar{n}_0$

$b_\beta(0) \quad - \quad - \quad \bar{b}_0$.

Ora vogliamo dimostrare che $T_\beta(s) = \bar{T}(s)$, $n_\beta(s) = \bar{n}(s)$, $b_\beta(s) = \bar{b}(s) \quad \forall s \in I$

Consid.

$$\frac{d}{ds}\left(\|T_\beta(s) - \bar{T}(s)\|^2 + \|n_\beta(s) - \bar{n}(s)\|^2 + \|b_\beta(s) - \bar{b}(s)\|^2\right) =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big(\langle T_\beta(s) - \bar{T}(s), T_\beta(s) - \bar{T}(s)\rangle + \langle n_\beta - \bar{n}, n_\beta - \bar{n}\rangle +$$

$$+ \langle b_\beta - \bar{b}, b_\beta - \bar{b}\rangle\Big) =$$

$$= 2\left[\langle T_\beta - \bar{T}, T_\beta' - \bar{T}'\rangle + \langle n_\beta - \bar{n}, n_\beta' - \bar{n}'\rangle + \right.$$

$$\left. + \langle b_\beta - \bar{b}, b_\beta' - \bar{b}'\rangle\right] = \quad \text{Frenet}$$

$$= 2\Big[\langle T_\beta - \bar{T}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{perché } k = \bar{k} = k_\beta \quad \text{e } \tau = \bar{\tau} = \tau_\beta}}{k}(n_\beta - \bar{n})\rangle + \langle n_\beta - \bar{n}, -k(T_\beta - \bar{T}) -$$

$$- \tau(b_\beta - \bar{b})\rangle + \langle b_\beta - \bar{b}, \tau(n_\beta - \bar{n})\rangle\Big] = 0$$

$\Rightarrow$ la somma è costante, ma in $s = 0$

Quindi $T_\beta(s) = \overline{T}(s)$ ecc.

Inoltre $\left.\begin{array}{l} T_\beta = \beta'(s) \\ \quad \parallel \\ \overline{T}(s) = \tilde{\alpha}'(s) \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(s) = \tilde{\alpha}(s) + c$

vettore costante

Ma $\beta(0) = \tilde{\alpha}(0) \Rightarrow c = 0$ e perciò $F(\alpha(s)) = \tilde{\alpha}(s)$.

Se invece $\overline{\tau}(s) = -\tau(s)$, def.

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$T_0 \longrightarrow \overline{T}_0$

$n_0 \longrightarrow \overline{n}_0$

$b_0 \longrightarrow -\overline{b}_0$

φ è isometria inversa.

Def. F come sopra e $\beta = F(\alpha)$:

ha $k_\beta = k$ ma $\tau_\beta = -\tau = \overline{\tau}$.

Si conclude come sopra. ∎

<u>Applicazioni</u>:

Se $\alpha(s)$ ha k e τ costanti $\Rightarrow$ è un'elica cilindrica; se inoltre $\tau = 0 \Rightarrow$ è una cf.

Esempi: 1) catenaria = grafico della funz. $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

2) trattrice

3) spirale logaritmica

2) La trattrice è la curva piana

$\alpha : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

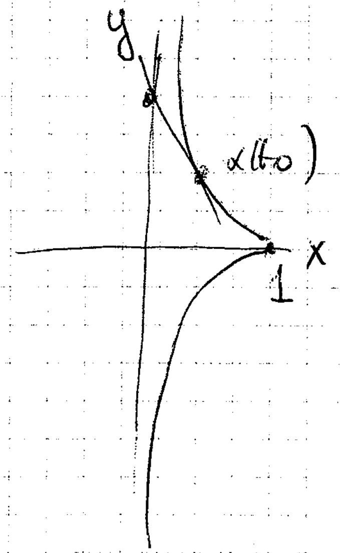
$\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2})$

a) α curva diff. reg. dappertutto tranne in $t = \frac{\pi}{2}$

b) la lung. dell segmento di tangente della trattrice tra il punto di tangenza e l'asse y è cost $= 1$.

a) $\alpha'(t) = \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\right) =$

$= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)$ 3



$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = (0, 1-\infty) = (0, -\infty)$

$\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \alpha(t) = (1, 0)$

$\lim_{t\to \pi} \alpha(t) = (0, -1 + \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tg} t) = (0, +\infty)$

$\downarrow$ $+\infty$

$\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (0, -1+1) = 0$

Retta tang in $\alpha(t_0)$: $\quad \alpha(t_0) + \lambda \alpha'(t_0)$

$$\begin{cases} x(\lambda) = \sin t_0 + \lambda \cos t_0 \\ y(\lambda) = \cos t_0 + \log \operatorname{tg} \frac{t_0}{2} - \lambda \sin t_0 + \frac{\lambda}{\sin t_0}) \end{cases}$$

Interseco con la retta $\{x=0\}$:

$x(\lambda) = \sin t_0 + \lambda \cos t_0 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -\operatorname{tg} t_0$

$y = \cos t_0 + \log \operatorname{tg} \frac{t_0}{2} + \operatorname{tg} t_0 \sin t_0 - \frac{\operatorname{tg} t_0}{\sin t_0} =$ 1.

$= \cos t_0 + \log \operatorname{tg} \frac{t_0}{2} + \sin^2 t_0 \ldots \frac{1}{\ldots} = \log \operatorname{tg} \frac{t_0}{\ldots}$

La distanza è

$d^2(t_0) = \sin^2 t_0 + \cos^2 t_0 = 1$ costante

Percorso del cane ostinato

$\boxed{\text{spirale logaritmica}}$

$\alpha(t) = (a e^{bt} \cos t, \ a e^{bt} \sin t), \qquad a > 0, b < 0$

- se $t \to +\infty$, $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = (0,0)$ perché $b<0$.

- $d(\alpha(t), 0)^2 = \|\alpha(t)\|^2 = a^2 e^{2bt} \to 0$ se $t \to +\infty$

- $\alpha'(t) = (a b e^{bt} \cos t - a e^{bt} \sin t, \ a b e^{bt} \sin t + a e^{bt} \cos t) =$

$= a e^{bt} (b \cos t - \sin t, \ b \sin t + \cos t)$

- $\|\alpha'(t)\|^2 = a^2 e^{2bt} (b^2 \cos^2 t - 2b \cancel{\cos \sin} + \sin^2 t +$

$+ b^2 \sin^2 + 2b \cancel{\sin \cos} + \cos^2 t) =$

$= a^2 e^{2bt} (b^2 + 1)$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau = \lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} a e^{b\tau} \sqrt{b^2+1} \, d\tau =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} a \frac{\sqrt{b^2+1}}{b} (\underset{\downarrow \atop 0}{e^{bt}} - e^{bt_0}) = \underbrace{-\frac{a}{b} \sqrt{b^2+1} \, e^{bt_0}}_{\text{lunghezza finita}}$$