Superfici di $\mathbb{R}^3$.
31/10/12

<u>Def</u>. superficie regolare parametrizzata è
$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto
$(u,v) \longrightarrow \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
tale che φ sia un'<u>immersione</u> cioè:

1) φ sia <u>differenziabile</u> (= esistono derivate parziali continue di tutti gli ordini);
2) φ sia <u>regolare</u> cioè $J\varphi(u,v)$ sia di rango massimo 2 $\forall (u,v) \in U$.
   Equivalentemente, $d_{P=(u,v)}\varphi : T_P\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(P)}\mathbb{R}^3$ è iniettiva in ogni punto P, quindi ha come immagine un piano

<u>Def</u>. più generale.
Un sottoinsieme $S \neq \emptyset$ di $\mathbb{R}^3$ è una <u>superficie regolare</u> se $\forall P \in S$ $\exists U \subset \mathbb{R}^2$ aperto e $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ <u>immersione</u> t.c. $\varphi(U)$ sia un intorno aperto di P su S, omeomorfo a U. In altre parole:

- $\varphi(U) = V \cap S$, V intorno aperto di P in $\mathbb{R}^3$,
- $\varphi : U \to \varphi(U)$ è un'~~applicazione~~ immersione t.c. $\exists$ $\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$, restrizione di una mappa continua da un aperto W di $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ ($W \supseteq \varphi(U)$).
  (φ è un'<u>embedding</u>)

- φ è detta una parametrizzazione locale o sistema di coordinate locali in P
- $\varphi(U)$ carta locale o intorno coordinato di P
- gli aperti del tipo $\{\varphi(U)\}$ formano un ricoprimento di S con aperti del tipo $\{V_i\}_{i\in I}$

L'insieme $\{V_i, \varphi_i\}$ è detto atlante su S.

— • —

Per ogni carta locale φ, $\forall (u,v) \in U$

$$d_{(u,v)}\varphi : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \xrightarrow[J\varphi(u,v)]{} T_{\varphi(u,v)}\mathbb{R}^3$$

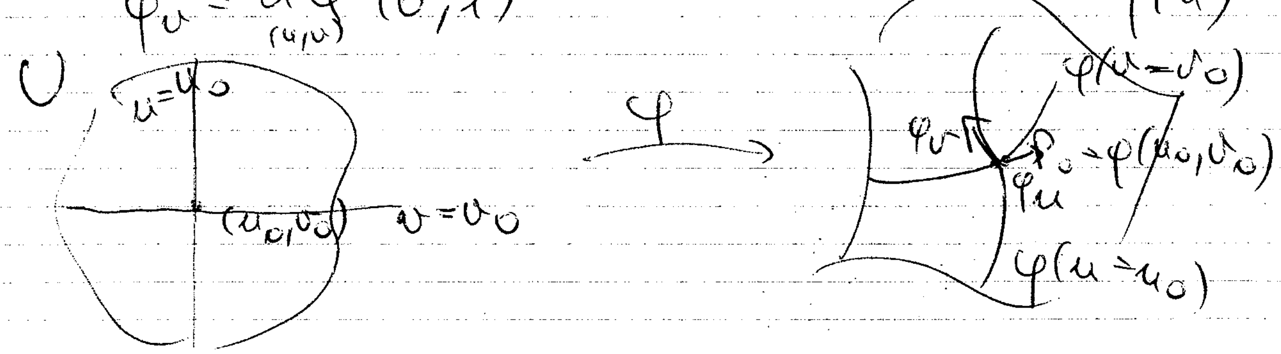
è iniettiva, la

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \text{ha rango } 2.$$

Le colonne sono le coordinate di 2 vettori φ_u, φ_v lin. indipendenti:

$$\varphi_u = d_{(u,v)}\varphi(1,0)$$

$$\varphi_v = d_{(u,v)}\varphi(0,1)$$



In W ci sono le rette coordinate def. da $u = u_0$ e $v = v_0$, passanti per (u_0, v_0).
$(1,0)$ è vett. di direzione di $v = v_0$ $\begin{cases} u = u \\ v = v_0 \end{cases}$
e $(0,1)$ di $u = u_0$ $\begin{cases} u = u_0 \\ v = v \end{cases}$.

Hanno come immagini in φ le curve coordinate passanti per $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$, o linee u e linee v: $\varphi(u, v_0)$, $\varphi(u_0, v)$.
Mediante φ trasporto su S le coordinate del piano (u, v).

$$d_{(u_0,v_0)}\varphi\underset{\substack{\text{vettore tang}\\ \text{alla retta } v=v_0}}{(1,0)} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$$
$$= \varphi_u(u_0, v_0)$$
prima colonna di $J\varphi(u_0,v_0)$

$\varphi_u(u_0, v_0)$ è il vettore tang alla curva coordinata $\varphi(u, v_0) = (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0))$
funzione solo di u.

Analogamente $\varphi_v(u_0, v_0) = d_{(u_0,v_0)}\varphi(0,1)$ è il vettore tang alla curva coordinata
$\varphi(u_0, v) = (x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v))$.

La cond "φ regolare" garantisce che φ_u, φ_v sono lin. indip., generano una giacitura.

<u>Def.</u> Piano tangente vettoriale a S in P è $T_pS = \langle \varphi_u(u_0,v_0), \varphi_v(u_0,v_0) \rangle$ se $P = \varphi(u_0,v_0)$.

Piano tangente affine è il piano affine

passante per P di giacitura $T_P S$

La def. potrebbe dipendere dalla particolare carta locale scelta. Si dà una seconda def. equivalente, più intrinseca.

Data S, sup. regolare in $\mathbb{R}^3$, una curva in S è una curva regolare $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la cui traccia è contenuta in S.

$$\alpha: I \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

Se $\alpha(I)$ è tutta contenuta in una carta locale $\varphi(U)$, si ha il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi^{-1}\circ\alpha"'] & \varphi(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left, "\varphi^{-1}"] & S \\
& U \arrow[u, shift left, "\varphi"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Per ip. $\exists$ continua $\varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow U$

$$(x,y,z) \longrightarrow (u(x,y,z), v(x,y,z))$$

continua

Allora $\varphi^{-1}\circ\alpha: I \longrightarrow U$ è una curva continua in $\mathbb{R}^2$

$$\varphi^{-1}\circ\alpha: t \xrightarrow{\alpha} \alpha(t) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \varphi^{-1}(\alpha(t))$$

$$\alpha(t) = (x(t),y(t),z(t)) \longrightarrow u(x(t),y(t),z(t)), v(x(t), \dots)$$

$$= (u(t), v(t))$$

curva piana

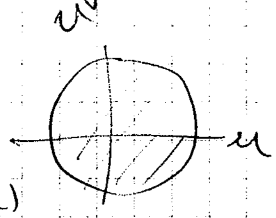
$(u(t),v(t))$ è una coppia di funzioni t.c. $\varphi(u(t),v(t)) = \alpha(t)$.

Es. S^2 sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ def. come $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

$\varphi : U \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ è una carta locale regolare

$(u,v) \longrightarrow (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

con U def. da $1-u^2-v^2>0$



Prendo $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow S^2$

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r] & (\cos t, \sin t, 0) \arrow[d, shift left, "\varphi^{-1}"] & (x,y,z) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
 & U \arrow[u, shift left, "\varphi"] & (x,z)
\end{tikzcd}$$

$\varphi^{-1}\circ\alpha : t \longrightarrow (\cos t, \sin t, 0) \longrightarrow (\cos t, 0)$ param. di un segmento dell'asse u.

$\varphi(U) \subset S \cap \{y>0\}$

se $I=(0,\pi) \Rightarrow \alpha(I)\subset\varphi(U)$ e $\varphi^{-1}\circ\alpha$ è ben def.

Def. Un vettore tangente v in P_0 a $\mathbb{R}^3$ si dice tangente a S in P_0 se $\exists\ \alpha(t)\subset S$ regolare t.c. $\alpha(t_0)=P$ e $\alpha'(t_0)=v$.

Teorema I vettori tangenti a S in P_0 formano un piano vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Se (U,φ) è una carta locale in P_0 t.c. $P_0=\varphi(u_0,v_0)$, allora tale piano risulta $T_{P_0}S = \langle \varphi_u(u_0,v_0), \varphi_v(u_0,v_0)\rangle$.

Dim: Sia $w=\alpha'(t_0)$, tang. in $P_0=\alpha(t_0)$ ad α.
Sia $\varphi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$, $(u_0,v_0)=(u(t_0),v(t_0))$.
$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$

Allora $\alpha'(t) = \varphi_u(u(t), v(t))\, u'(t) + \varphi_v(u(t), v(t))\, v'(t)$,

$w = \alpha'(t_0) = \varphi_u(u_0, v_0)\, u'(t_0) + \varphi_v(u_0, v_0)\, v'(t_0)$.

Viceversa sia $w = \lambda \varphi_u(u_0, v_0) + \mu \varphi_v(u_0, v_0)$.
Cerco una curva in U, passante per (u_0, v_0)
param. da $(u(t), v(t))$, tale con $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$

$\lambda = u'(t_0)$

$\mu = v'(t_0)$.

Basta prendere la retta

$$\begin{cases} u(t) = \lambda t + u_0 \\ v(t) = \mu t + v_0 \end{cases}$$

Allora $\alpha(t) = \varphi(\lambda t + u_0, \mu t + v_0)$. ∎

Oss. 1 Lo sviluppo di Taylor di $\varphi(u,v)$ mostra che il piano tg affine è l'approssimante lineare.

$$\varphi(u,v) = \varphi(u_0, v_0) + \varphi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \varphi_v(u_0, v_0)(v - v_0) + \dots$$

Oss. 2 $T_P \mathbb{R}^n$ è lo insieme dell'i vettori tangenti alle curve reg. di $\mathbb{R}^n$ per P.

Esempi

1) Piano per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ di giacitura $\langle w, w' \rangle$.

(*) $\varphi \begin{cases} x = x_0 + u w_1 + v w_1' \\ y = y_0 + u w_2 + v w_2' \\ z = z_0 + u w_3 + v w_3' \end{cases}$ $\qquad \varphi(u,v) = P_0 + u w + v w'$.

$$J\varphi = \begin{pmatrix} w_1 & w_1' \\ w_2 & w_2' \\ w_3 & w_3' \end{pmatrix} \qquad \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \pi \text{ suriettiva}$$

$\exists\, \varphi^{-1}$: il sistema$^{(*)}$ ha soluzione in (u,v) perché φ è suriettiva, ~~rg~~ $J\varphi = 2 \Rightarrow$ ho $1!$ soluzione che posso calcolare con Cramer

$$u = \frac{\begin{vmatrix} x-x_0 & w_1' \\ y-y_0 & w_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_1 & w_1' \\ w_2 & w_2' \end{vmatrix}} \qquad v = \frac{\begin{vmatrix} w_1 & x-x_0 \\ w_2 & y-y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_1 & w_1' \\ w_2 & w_2' \end{vmatrix}}$$

se il primo minore è $\neq 0$.

2) Sfera S^2

a) 6 carte, param. di Monge

$$\varphi_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

con $U = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$

$\varphi_1(U) =$ calotta dove $z > 0$, emisfero sup.

$$(\varphi_1)_x = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

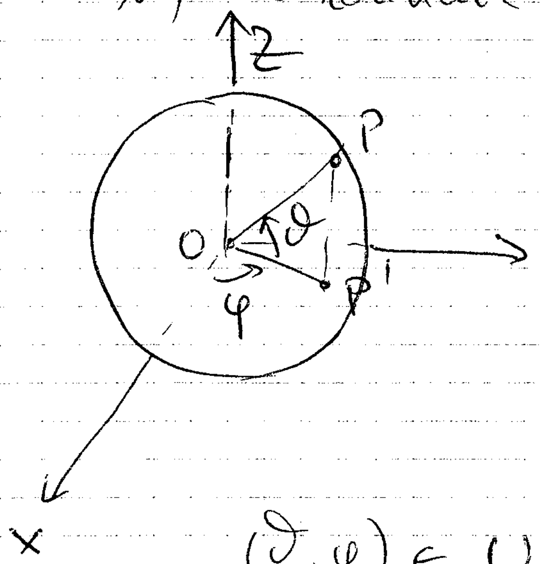
$$(\varphi_1)_y = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

$\Rightarrow$ rk $J\varphi_1 = 2$.

$\varphi_1^{-1} : (x,y,z) \to (x,y)$ continua.

In modo analogo ho altre 5 carte, tutte diff. su U, che ricoprono S^2.

b) Coordinate polari



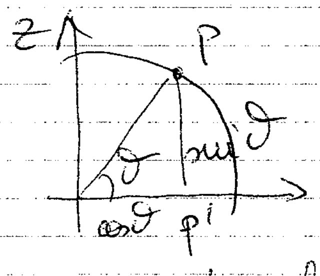
Prendo $P \in S^2$, P' la sua proiez. ortogonale sul piano $z=0$; φ è l'angolo tra $(1,0)$ e $\overrightarrow{OP'}$ in senso antiorario, ϑ è l'angolo tra $\overrightarrow{OP'}$ e $\overrightarrow{OP}$

$$(\vartheta,\varphi) \in U = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times(0,2\pi)$$

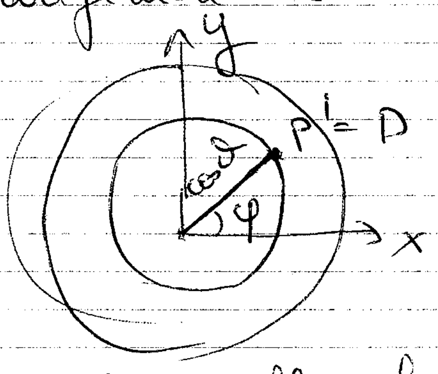
$$\Big\downarrow F$$

$$(\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta)$$

ϑ latitudine, φ longitudine



sez. verticale



P' sta sulla circf di centro O e raggio cos ϑ

$F(U) = S^2 \setminus C$ dove C = semicirf sul piano $y=0$ con $x \geq 0$.

$$JF = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

con minori: $-\sin\vartheta\cos\vartheta$

$\cos^2\vartheta\sin\varphi$

$\cos^2\vartheta\cos\varphi$ $\Bigg\}$ $\cos\vartheta$ non è nulla per $-\frac{\pi}{2}<\vartheta<\frac{\pi}{2}$

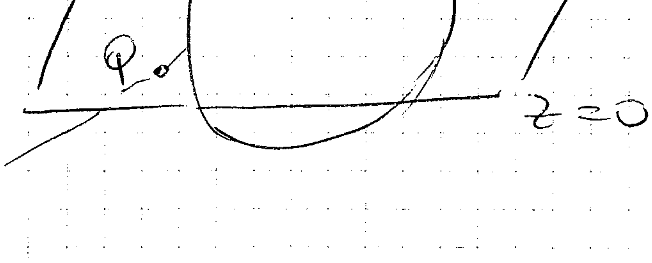
quindi F è regolare.
Invertibilità di F: $z = \sin\vartheta$, e $\sin\vartheta$ è crescente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ quindi $\vartheta = \arcsin z$, continua.
Poi

$$x = \cos\vartheta \cos\varphi = \sqrt{1-z^2}\cos\varphi$$
$$y = \cos\vartheta \sin\varphi = \sqrt{1-z^2}\sin\varphi$$

$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$ e $\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\varphi$ in ogni punto una almeno delle 2 è diff.
e quindi $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ opp. $\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$.

Per ricoprire S^2 serve una seconda carta simile, per es. con $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi + \frac{\pi}{2}$, ma restano fuori i poli nord e sud; + una carta con permutaz. di x, y, z.

c) Proiezione stereografica.



$N(0,0,1)$ polo nord

p_N è la proiez. da N sul piano $xy \simeq \mathbb{R}^2$

$$p_N : \underset{\substack{\shortparallel\!\!\!/ \\ N}}{P} \longrightarrow \overline{PN} \cap \{z=0\}$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ $\quad \overline{PN} \begin{cases} x = t x_0 \\ y = t y_0 \\ z = 1 + t(z_0 - 1) = 0 \end{cases} \quad t = \frac{1}{1-z_0}$

$$p_N : (x_0, y_0, z_0) \longrightarrow \left(\frac{x_0}{1-z_0}, \frac{y_0}{1-z_0}\right)$$

p_N è suriettiva e $p_N^{-1}: Q \longrightarrow (\overline{QN} \cap S^2) \setminus N$

$Q = (u, v)$

$\overline{QN}$ $\begin{cases} x = ut \\ y = vt \\ z = 1 - t \end{cases}$ $\quad \overline{QN} \cap S^2 : u^2t^2 + v^2t^2 + (1-t)^2 = 1$

$\Longrightarrow t^2(u^2+v^2+1) - 2t = 0$

$t = 0$ dà N

$t = \dfrac{2}{u^2+v^2+1}$ dà $p_N^{-1}(Q) = \left(\dfrac{2u}{u^2+v^2+1}, \dfrac{2v}{u^2+v^2+1}, \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$

Si prende $\varphi = p_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$.

Calcolare $J\varphi$. $\quad \varphi^{-1} = p_N$ è continua.

Come seconda carta si prende la proiez. dal polo sud P_S.

3) Quadriche = sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ che si possono rappresentare come $\{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}$ con F pol. di 2° grado.

Esempi:

a) cilindro circolare retto

$x^2 + y^2 = 1$

$\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$

opp. $\in (\pi, 3\pi)$

$J\varphi = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in ogni punto almeno un minore è $\neq 0$

$\varphi(U) = S \setminus \{\text{retta}\}$

a) Cono quadrico

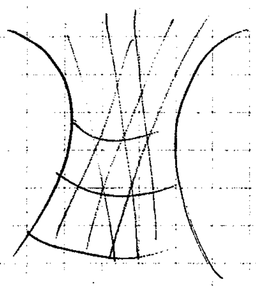
$x^2 + y^2 = z^2$ $\qquad \forall z = z_0$, si ha una

$\varphi(z,t)$ $\begin{cases} x = z\cos t \\ y = z\sin t \\ z = z \end{cases}$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} -z\sin t & \cos t \\ z\cos t & \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è regolare per $z \neq 0$ cioè escludo il vertice.

c) $x^2+y^2 = z^2+1$ iperboloide a una falda



$z = \pm\sqrt{x^2-y^2+1}$ e carte analoghe

L'equazione si può riscrivere nella forma:

$x^2 - z^2 = 1 - y^2$, ossia

$$(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$$

$$\begin{vmatrix} x-z & 1-y \\ 1+y & x+z \end{vmatrix} = 0$$

Da questa ~~rap~~ espressione segue che per ogni punto della superficie S passano 2 rette contenute in S. Infatti $\forall P(x_0,y_0)$, $\exists [\lambda, \mu]$ t.c. $[\lambda', \mu']$

$\begin{cases} \mu(x-z) = \lambda(1+y) \\ \mu(1-y) = \lambda(x+z) \end{cases}$ e $\begin{cases} \lambda'(x-z) = \mu'(1-y) \\ \lambda'(1+y) = \mu'(x+z) \end{cases}$

Ho così 2 famiglie di rette, ciascuna parametrizzata da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} / \sim \; = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

L'intersezione di S con il piano $y=0$ è la curva di equazione $x^2 - z^2 = 1$, cioè un'iperbole.

d) $x^2+y^2=z^2-1$ iperboloide a 2 falde
ha punti solo $|z|\geq 1$
non è connesso

$S\cap\{y=0\}$ è l'iperbole $x^2-z^2=-1$

c) e d) sono superfici di rotazione.

4) Sviluppabile delle tangenti di una curva.
$\alpha(t): I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva regolare
Def. $\varphi(t,u) = \alpha(t) + u\alpha'(t)$, $(t,u)\in I\times\mathbb{R}$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} x'+ux'' & x' \\ y'+uy'' & y' \\ z'+uz'' & z' \end{pmatrix}$$

$\varphi_t = \alpha'(t) + u\alpha''(t)$
$\varphi_u = \alpha'(t)$

φ_t, φ_u sono lin. indip. $\Leftrightarrow$ $\varphi_t\wedge\varphi_u \neq 0$

$\varphi_t\wedge\varphi_u = (\alpha'+u\alpha'')\wedge\alpha' = u\,\alpha''\wedge\alpha'$: si annulla dove $u=0$ punti della curva, e dove $\alpha'\wedge\alpha''=0$ tangenti di flesso

È una sup. differenziabile parametrizzata, non regolare nei punti di $\alpha(t)$ e lungo le tangenti di flesso. Non è detto che φ sia iniettiva.
È un esempio di superficie rigata.

5) Superfici di rotazione.

Sia data una curva regolare $\alpha(t) = (x(t), z(t))$ nel piano xz, contenuta nel semipiano $x>0$. La facciamo ruotare intorno all'asse z:

$$\varphi(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = x(u)\cos v \\ y(u,v) = x(u)\sin v \\ z(u,v) = z(u) \end{cases}$$

φ è non reg. dove $x(u)=0$ (ma per ip. $x>0$) o dove $x'(u) = z'(u) = 0$ (ossia se $\alpha'(u)=0$, ma α è regolare).

In particolare, consideriamo la cf di centro $(R,0)$ e raggio r, con $R>r$.

$$\begin{cases} x(t) = R + r\cos t \\ z(t) = r\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(u,v) = (R+r\cos u)\cos v \\ y(u,v) = (R+r\cos u)\sin v \\ z(u,v) = r\sin u \end{cases}$$

<u>Esercizio.</u>
Far vedere che i due iperboloidi c) e d) sono superfici di rotazione.

<u>Criteri di regolarità</u>

1) $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione diff., $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto

Sia S il grafico di f:
$$S = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y)\in U\} \subset \mathbb{R}^3$$
S è una sup. regolare in $\mathbb{R}^3$.

Dim. S è l'immagine di

$$\varphi : U \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longrightarrow (u,v,f(u,v))$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$ di rango cost 2

$$\varphi^{-1} : S \longrightarrow U$$ è continua.

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,y)$$

Una parametrizzazione locale di questo tipo è detta "di Monge".

Es. le 6 carte locali del primo atlante considerato per S^2.

2. Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una funz.

$$U \subset \mathbb{R}^3$$

differenziabile $f(x,y,z)$.

Sia $a \in f(U) \subset \mathbb{R}$: a è detto valore regolare di f se $\forall\ P \in U$ t.c. $f(P) = a$ (cioè $P \in f^{-1}(a)$) si ha: gradiente di $f \neq 0$, cioè $\nabla(f)(P) = (f_x(P), f_y(P), f_z(P)) \neq (0,0,0)$.

Teorema Se a è un valore regolare di f, allora $S = f^{-1}(a)$ è una sup. regolare, detta superficie di livello a di f.

Oss. L'ip. $\nabla f(P) \neq (0,0,0)$ equivale a "il differenziale di f è suriettivo", Dim. Sia $a = f(P)$, supp. $f_z(P) \neq 0$.

Consideriamo l'appl.

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x, y, f(x,y,z))$$

$$JF(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$ e quindi

$|JF(P)| \neq 0$.

Ora usiamo il

Teorema della funzione inversa.

Sia $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funz. differenziabile def. nell'aperto U. Supp. che in $P \in U$ il differenziale $d_P F : T_P\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(P)}\mathbb{R}^n$ sia un isomorfismo, cioè $|JF(P)| \neq 0$.

Allora esistono intorni $V_P \subset U$ di P e $W_{F(P)} \subset \mathbb{R}^n$ di $F(P)$ t.c. $F| : V_P \to W_{F(P)}$ ammetta inversa differenziabile.

Dunque $\exists\ V_P, W_{F(P)}$ t.c.

$F|_{V_P} : V_P \longrightarrow W_{F(P)}$ è invertibile, con inversa $F^{-1} : W_{F(P)} \longrightarrow V_P$ differenziabile.

Scrivo F nella forma:

$$F \begin{cases} u = x \\ v = y \\ t = f(x,y,z) \end{cases} \qquad F : (x,y,z) \longrightarrow (x,y, f(x,y,z))$$

Allora esiste una funzione differ. $g: W_{F(P)} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\overset{-1}{F}: \underset{\underset{W_{F(P)}}{\uparrow}}{(u,v,t)} \longrightarrow (\underset{\underset{x}{\shortparallel}}{u}, \underset{\underset{y}{\shortparallel}}{v}, \underset{\underset{z}{\shortparallel}}{g(u,v,t)})$$

e si ha: $z = g(x,y,f(x,y,z))$ perchè:

$$(x,y,z) \xrightarrow{F} (x,y,f(x,y,z)) \xrightarrow{\overset{-1}{F}} (x,y,\underset{\underset{(x,y,z)}{\shortparallel}}{g}(x,y,f(x,y,$$

$$\overset{-1}{F} \circ F = 1_{V_P}$$

Ora definisco $g(u,v,a) =: h(u,v)$;

h è differenziabile, definita sulla proiezione W' di $W_{F(P)}$ in $\mathbb{R}^2$

$$W_{F(P)} \longrightarrow W'$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x,y)$$

Il grafico di h è:

$$\{(x,y,h(x,y)) \mid (x,y) \in W'\} =$$
$$= \{(x,y,g(x,y,a)) \mid (x,y) \in W'\} =$$
$$= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in W',\ z = g(x,y,a)\} =$$
$$= \{\overset{-1}{F}(x,y,a) \mid (x,y,a) \in W_{F(P)}\}$$
$$= \{(x,y,z) \in V_P \mid \underset{\underset{(x,y,f(x,y,z))}{\shortparallel}}{F(x,y,z)} = (x,y,a)\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in V_P \mid f(x,y,z) = a\}$$

$= \overset{-1}{f}(a) \cap V_P$: questo può essere preso come intorno coordinato di P su $\overset{-1}{f}(a)$ con parametrizzazione di Monge relativa alla funz. $h(x,y)$.

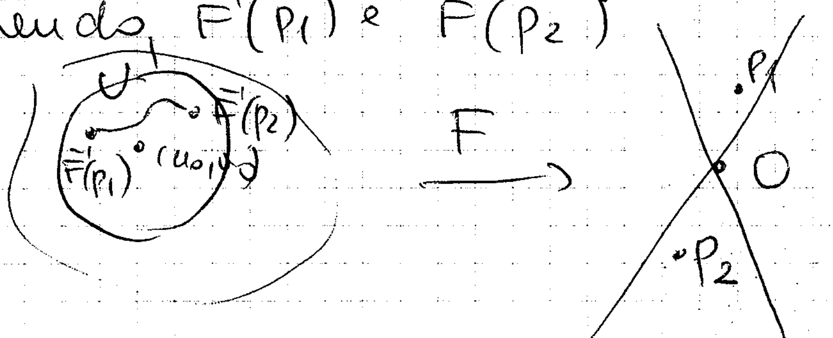
Esempi di questa situazione sono le quadriche a)c)d) e molte superfici algebriche, ossia date da un'equazione $F(x,y,z)=0$, dove $F\in\mathbb{R}[x,y,z]$.
Il problema è che 0 sia un valore reg.
Nel caso b): $F=x^2+y^2-z^2=0$, 0 non è valore regolare: $\nabla(F)=(2x,2y,-2z)$ si annulla in $(0,0,0)$, con $F(0,0,0)=0$: il criterio non si applica.

La cond. trovata è suff. ma non necessaria: es. $G=(x^2+y^2+z^2-1)^2=0$
$\nabla G=(2(x^2+y^2+z^2-1)(2x,2y,2z))$.

Tuttavia il cono $S: x^2+y^2-z^2=0$ non è regolare in 0. Se lo fosse, esisterebbe una parametrizzaz. regolare

$$F: U \longrightarrow S\cap V, \quad V\subset\mathbb{R}^3, \quad U\subset\mathbb{R}^2,$$ con

F omeomorfismo.
Sia $(u_0,v_0)=F^{-1}(0,0,0)$; U è aperto $\Rightarrow \exists\, U'\subset U$ disco aperto di centro (u_0,v_0), e $F(U')=S\cap V'$. V' intorno di $(0,0,0)$ in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists$ punti in V' con $z>0$ e punti con $z<0$: ne scelgo 2 P_1 e P_2; prendo $F^{-1}(P_1)$ e $F^{-1}(P_2)$



Si può trovare un cammino che li congiunge non passando per (u_0,v_0)

ma quando lo compongo con F deve passare per $(0,0,0)$, per il teor. del valor medio, perché su S $(0,0,0)$ è l'unico punto con $z=0$. Ho così un assurdo.

— • —

Vale il seguente importante

Teorema

$S \subset \mathbb{R}^3$ sia una sup. regolare. Allora S è localmente il grafico di una funzione differenziabile: $\forall P \in S \ \exists V$ intorno aperto di P in S di uno dei seguenti tipi: $z=f(x,y)$ o $y=g(x,z)$ o $x=h(y,z)$.

Dim. (cenno)

Sia φ una carta locale in $P = \varphi(u_0,v_0)$. Si ha $J\varphi(u_0,v_0) \neq 0$, allora un minore 2×2, per esempio $J\varphi|_{x,y}(u_0,v_0) \neq 0$.

Allora considero la composta di φ con la proiezione sul piano (x,y):

$$(u,v) \xrightarrow{\varphi} (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \xrightarrow{\pi} (x(u,v), y(u,v))$$

$J(\pi\circ\varphi)(u_0,v_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ l'inversa di $\pi\circ\varphi$ differenziabile in un intorno (u_0,v_0).

$\Rightarrow$ esistono funz. diff. $u(x,y)$, $v(x,y)$, e poi si considera $z(u(x,y), v(x,y)) = z(x,y)$.

Come corollario si può dire: che se S è una sup. regolare e $\varphi: U \to S$

è un'appl. differenziabile, iniettiva e regolare, allora φ^{-1} è necessariamente continua. (senza dim.)

— . —

Funzioni sulle sup. regolari.

Sia $f: S \to \mathbb{R}$ un'applicazione = funzione su S.

<u>Def</u>. Sia $P \in S$. f si dice <u>differenziabile in P</u> se l'espressione di f in coordinate locali è differenziabile in un intorno di P.

Ossia: se $\varphi: U \to \underset{P}{\varphi(U)} \subset S$ è un intorno coordinato di P, devo avere che

$$U \xrightarrow{\varphi} \underset{P}{\varphi(U)} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad (u,v) \to \varphi(u,v) \to f(\varphi(u,v))$$

$f \circ \varphi$ è differenziabile in $\varphi^{-1}(P)$

$f(\varphi(u,v)) = f(u,v)$ è f espressa in coordinate locali.

Che cosa succede se cambio carta locale?

2 carte locali sono legate da un <u>cambiamento di coordinate</u>.

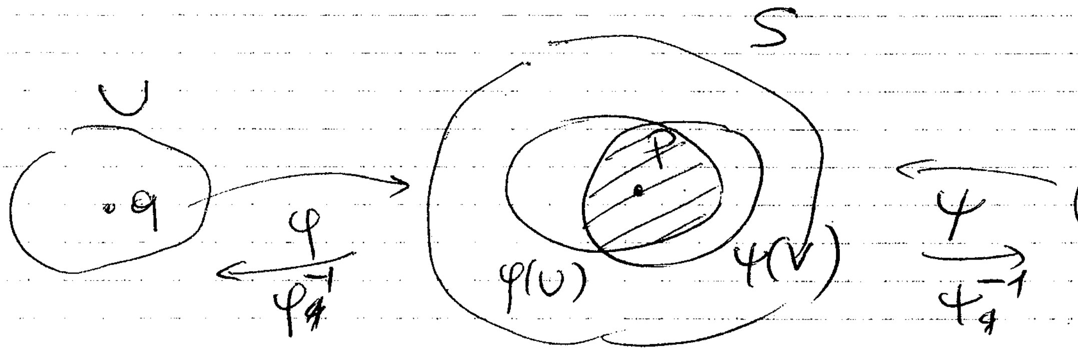
$$U \xrightarrow{\varphi} S \xleftarrow{\psi} V$$

siano 2 carte locali in P, sia $W = \varphi(U) \cap \psi(V)$ intorno aperto di P.

$(u,v) \to \varphi(u,v)$

su W sono definite φ^{-1} e ψ^{-1}

$\to \psi(\lambda,\mu)$



I cambiam. di coordinate sono $h := \varphi^{-1}\circ\psi$ (def. su $\psi^{-1}(W)$) e $k := \psi^{-1}\circ\varphi$ (def. su $\varphi^{-1}(W)$).

$$h : \psi^{-1}(W) \xrightarrow{\ \psi\ } W \xrightarrow{\ \varphi^{-1}\ } \varphi^{-1}(W)$$
$$(\lambda,\mu) \longrightarrow (x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu), \dots) \longrightarrow (u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu))$$

Prop. h e k sono diffeomorfismi, cioè appl. differenziali con inverso differenziale.

Dim. Thm. della funz. inversa.

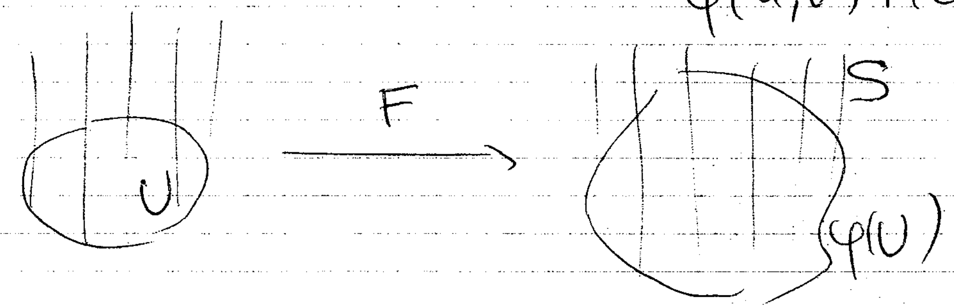
Ho $P\in W$, considero $q = \varphi^{-1}(p)\in U$

$J\varphi(q)$ ha rango 2, supp. che sia non nullo il primo minore:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

Definisco

$$F : U\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v,t) \longrightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u,v)+t)$$
$$= \varphi(u,v) + (0,0,t)$$



$$JF = \left(\begin{array}{c|c} J\varphi & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right) \quad \text{ha det} \neq 0 \text{ in } (q,0)$$

$\Rightarrow \exists\, F^{-1}$ differenziabile in un intorno di $F(q,0) = \varphi(q) = P$, in $\mathbb{R}^3$.

Ora considero

$$F^{-1} \circ \psi : (\lambda,\mu) \xrightarrow{\psi} (x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu), z(\lambda,\mu)) \xrightarrow{F^{-1}} (u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu), t(\lambda,\mu)),$$

tale che $F(u,v,t) = (x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu), z(\lambda,\mu))$

$$\| \\ (x(u,v), y(u,v), z(u,v)+t)$$

~~Ip~~ In particolare le prime 2 compon. di $F^{-1}\circ\psi$ sono 2 funz. diff. di (λ,μ) $u(\lambda,\mu)$, $v(\lambda,\mu)$, che rappresentano proprio h.

Analogamente per k. ∎

<u>Cor. 1</u> La def. di funz. diff. su S è ben posta: se f è dif. in P in coord. locali (u,v), lo è anche in coord. locali (λ,μ), e per ogni altra carta.

<u>Cor. 2</u> Se α è una curva regolare in S, $\varphi^{-1}\circ\alpha = (u(t), v(t))$ è differenziabile.

<u>Campi vettoriali.</u>

$\mathbb{R}^3$ $\quad \forall P \in \mathbb{R}^3$ considero $T_P\mathbb{R}^3$

<u>Def.</u> un campo vettoriale euclideo su una sup. $S \subset \mathbb{R}^3$ regolare è un'applicazione $X : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $\forall P \in S$ $X(P) \in T_P\mathbb{R}^3$

$X(P) = (x(P), y(P), z(P))$ terna di funzioni

X è un campo vettoriale normale (~~tan~~ tangente) a S se $X(P)$ è ortog. a $T_P(S)$ $\forall P$ (risp. $X(P) \in T_P(S)$ $\forall P$).

Se per es. S è una sup. reg. ~~1~~ parametrizzata da $\varphi: U \to S$, posso def. un campo vettoriale normale differenziabile ponendo $N(P) = \varphi_u(u_0,v_0) \wedge \varphi_v(u_0,v_0)$ ~~se~~ $P = \varphi(u_0,v_0)$.

Tale campo N è già espresso in coordinate locali.

Separatamente φ_u e φ_v sono campi vett. tangenti (diff.).

La direz. di un campo vett. normale è det. in ogni punto, ma in qualche punto può annullarsi.

Nell'esempio $N(P) = \varphi_u \wedge \varphi_v$, più esplicitamente ho

$$N(u,v) = (y_u z_v - y_v z_u,\ x_v z_u - x_u z_v,\ x_u y_v - x_v y_u)$$

__Prop__ $S \subset \mathbb{R}^3$ sup. di livello a di f, a valore regolare di f diff.
Il gradiente di f ∇f è un campo vett. normale mai nullo su S.

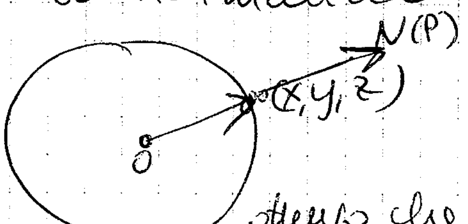
__Dim__ Bisogna dim. che $\nabla f(P)$ è ortogonale a ogni vettore tangente in P.

Sia $\alpha(t) \subset S$ reg., $\alpha(t_0) = P$, $\alpha'(t_0) \in T_P S$

$$< \nabla f(P), \alpha'(t_0) > = <(f_x(\cancel{x(t_0)}, y(t_0), z(t_0)), x'(t_0)>$$
$$= <(f_x(x(t_0), y(t_0), z(t_0)), f_y(--), f_z(--)), (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))>$$
$$= f_x(\alpha(t_0)) x'(t_0) + f_y(\alpha(t_0)) y'(t_0) + f_z(\alpha(t_0)) z'(t_0)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} (f(x(t), y(t), z(t)) \Big|_{t=t_0}$$

Ma $f(x(t), y(t), z(t)) \equiv a \Rightarrow$ la derivata è identicamente nulla. Inoltre ∇f è sempre $\neq 0$ perché a è valore regolare. ∎

Os. ~~Es.~~: la sfera ha ~~sfera~~ $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ come campo normale diff. Se lo normalizzo ottengo $N(x,y,z) = (x,y,z)$ ($N(P)$): è il vettore $\vec{OP}$ applicato in P. In particolare



ottengo che il piano tangente in è ortogonale al raggio vettore $\vec{OP}$.

Superfici orientabili

Def. $S \subset \mathbb{R}^3$ sup. regolare

S è <u>orientabile</u> se ammette un campo differenziabile normale mai nullo su tutta S, o, equivalentemente, se ammette un campo diff. normale di versori: ~~Esse~~

Data una param. locale φ, il campo $\varphi_u \wedge \varphi_v$ ~~dice~~ mostra che $\varphi(U)$ è

orientabile. Non è detto lo sia globalmente.
Ogni sup. di livello è orientabile.
"Orientare S" = fissare un campo diff. di versori normali = determinare "una faccia di S" da chiamarsi faccia positiva = orientare tutti i piani tangenti a S: se fisso $N(p) \perp T_p(S)$ basi positive di $T_p(S)$ sono quelle (e_1, e_2) t.c. $< e_1 \wedge e_2, N(p) > > 0$

Teorema (che dà cond. nec. e suff. perché S sia orientabile).
S è orientabile $\Longleftrightarrow$ $\exists$ un atlante $\mathcal{A}$ t.c. se P appartiene a 2 aperti coordinati di $\mathcal{A}$ il det jacobiano del cambiamento di coordinate è >0 in P; ossia: sull'intersezione di 2 carte il det jacobiano del camb. di coord. è >0.
Dim.
"$\Leftarrow$" Sia $\mathcal{A}$ un tale atlante; $\forall$ carta $\varphi(u,v): U \to S$ def. $N(u,v) = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$, versore norm. in $\varphi(u,v)$, differenziabile.
Sia $\psi(\lambda,\mu): V \to S$ un'altra carta, t.c. $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Il camb. di coord. $\varphi^{-1} \circ \psi$ è dato da $(u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu))$ differenziabili, t.c. $\varphi(u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu)) =$
$= \varphi(\varphi^{-1} \circ \psi)(\lambda,\mu) = \psi(\lambda,\mu)$.

$$J(\varphi^{-1}\circ\psi) = \begin{pmatrix} u_\lambda & u_\mu \\ v_\lambda & v_\mu \end{pmatrix} = u_\lambda v_\mu - v_\lambda u_\mu.$$

Ora confrontiamo $N(u,v)$, def. a partire da φ, con l'analogo campo costruito con ψ:

$\psi_\lambda \wedge \psi_\mu$ normalizzato

$$\psi_\lambda = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi(u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu))) = \varphi_u u_\lambda + \varphi_v v_\lambda$$

$$\psi_\mu = \frac{\partial}{\partial\mu}(\varphi(u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu))) = \varphi_u u_\mu + \varphi_v v_\mu$$

$$\psi_\lambda \wedge \psi_\mu = (u_\lambda u_\mu)\cancel{\varphi_u \wedge \varphi_u} + (u_\lambda v_\mu - v_\lambda u_\mu)\varphi_u \wedge \varphi_v +$$
$$+ v_\lambda v_\mu \cancel{\varphi_v \wedge \varphi_v}$$
$$= |J(\varphi^{-1}\circ\psi)|\, \varphi_u \wedge \varphi_v$$

su $\varphi(U) \cap \psi(V)$ il det è > 0

quindi i 2 campi normalizzati coincidono; procedendo così a partire da (U,φ) costruisco N su tutta S.

"$\Longrightarrow$" Sia $N: S \to \mathbb{R}^3$ campo di versori normali. Sia $\mathcal{A}$ un qualunque atlante su S: posso supp. che tutti gli aperti coord. siano connessi, altrim. li sostituisco con le loro comp. connesse. Fisso una carta $\varphi: U \to \varphi(U) \subset S$; confronto $N|_{\varphi(U)}$ con $\dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$: se

sono opposti scambio u con v, altrim. non cambio niente. ...

il prod. scalare
$$< N(u,v), \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} > = \pm 1,$$

essendo una funz. continua su $\varphi(U)$ che è connesso, vale sempre 1 o sempre -1.
Quindi per ogni aperto faccio in modo che $N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$. Allora se ho

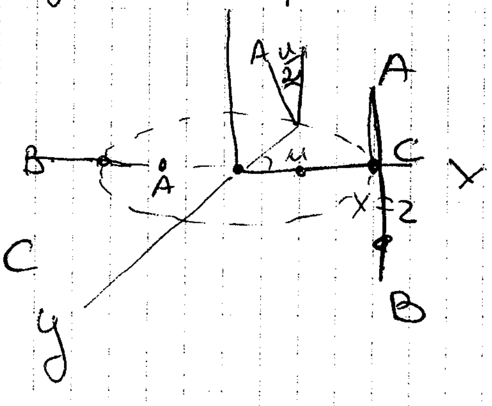
$\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$, là sopra ho
$$\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{\psi_\lambda \wedge \psi_\mu}{\|\psi_\lambda \wedge \psi_\mu\|}$$: per quanto visto nella prima parte $|J(\varphi^{-1} \circ \psi)| > 0$. ■

<u>Cor.</u> Se S è coperta da una carta coordinata, o da 2 carte coord. con intersezione connessa, S è orientabile.
Se 1 carta ovvio. Se 2 carte, ho una sola intersez. da considerare; se $|J(\varphi^{-1} \circ \psi)| < 0$, scambio (u, v).

<u>Esempio di sup. non orientabile</u>
Il nastro di Möbius.
Considero la cf di centro $O(0,0,0)$ e raggio 2 nel piano xy: $x^2+y^2=4$,
$$(*) \begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\sin u \\ z = 0 \end{cases}$$

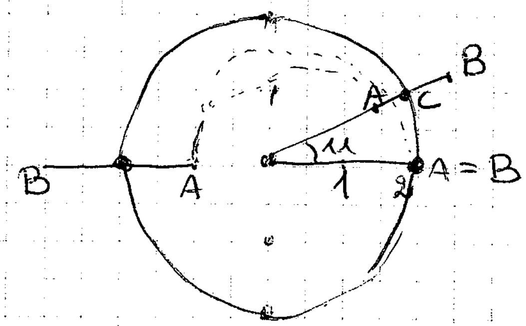
considero il segmento aperto AB def. da

$$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ |z|<1 \end{cases}$$



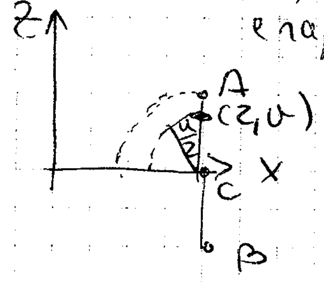
con punto medio C

Muovo C sulla cf come in (*), e contemporaneamente ruoto AB intorno a C nel piano generato da C e dall'asse z, in modo che quando C ha percorso l'arco u, AB abbia ruotato di $\frac{u}{2}$



Quando C torna al punto di partenza, $u=2\pi$, AB ha ruotato di π, dunque A e B sono scambiati

Prendo un punto $(2, 0, v)$ sul segmento AB, con $0<v<1$; descrive la cf di centro $(2,0)$ e raggio $|v|$ nel piano xz, partendo dall'asse verticale



$$\begin{cases} x = 2 - v\sin\frac{u}{2} \\ z = v\cos\frac{u}{2} \end{cases}$$ perché

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right) = -\sin\frac{u}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right) = \cos\frac{u}{2}$

Oss. che questa parametrizz. va ~~benalsai~~ bene anche per $v<0$

Mettendo insieme i 2 moti:

$$\varphi \begin{cases} x(u,v) = (2 - v\sin\frac{u}{2})\cos u \\ y(u,v) = (2 - v\sin\frac{u}{2})\sin u \end{cases}$$

φ è def. su U: $0 < u < 2\pi$
$-1 < v < 1$

Perdo i punti sull'asse x positivo.

II carta: parto dall'asse y, quando $u = \frac{\pi}{2}$ e AB ha ruotato di $\frac{\pi}{4}$.

Uso coord. locali $\bar{u}, \bar{v}$:

$\bar{u}$ parte da 0 e $\begin{cases} \bar{u} = u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = v \end{cases}$

Allora $\begin{cases} \cos u = \cos(\bar{u} + \frac{\pi}{2}) = -\sin \bar{u} \\ \sin u = \cos \bar{u} \end{cases}$

La cf ora è $(-2\sin \bar{u}, 2\cos \bar{u})$

AB: $(2 - \bar{v} \sin(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}), \bar{v} \cos(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}))$

$$\psi \begin{cases} x(\bar{u}, \bar{v}) = -(2 - \bar{v} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}) \sin \bar{u} \\ y(\bar{u}, \bar{v}) = (2 - \bar{v} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}) \cos \bar{u} \\ z(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{v} \cos(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$0 < \bar{u} < 2\pi \iff -\frac{\pi}{2} < u < \frac{3}{2}\pi$

non trovo i punti sull'asse $y > 0$

Allora $\varphi(U) \cap \psi(V)$ è sconnesso

$$\varphi(U) \cap \psi(V) = W_1 \cup W_2 \quad \text{dove}$$

W_1: punti tra asse $x > 0$ e asse $y > 0$ in verso antiorario

W_2: tra asse $y > 0$ e asse $x > 0$

Su W_2: $0 < \bar{u} < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2} < u < \cancel{\tfrac{\pi}{4}}\, 2\pi$

$$\begin{cases} \bar{u} = u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = v \end{cases}$$

Su W_1: $\frac{3}{2}\pi < \bar{u} < 2\pi$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$

Allora $\begin{cases} \bar{u} = (u - \frac{\pi}{2}) + 2\pi = u + \frac{3}{2}\pi \\ \bar{v} = -v \end{cases}$ (perché con φ ci arrivo ~~dritto~~ dopo un angolo di 2π risp. a φ)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ su } W_1$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ su } W_2$$

Impossibile def. N su tutta S.

<u>Oss.</u>

Si dimostra che ogni sup. regolare <u>compatta</u> e <u>orientabile</u> è esprimibile come sup. di livello di una funz. diff. di 3 variabili (si veda Do Carmo: si costruisce un intorno tubulare di S t.c. i segmenti di retta normale a S non si intersechino fra loro; la funzione è la distanza orientata dal piede della perpendicolare.

Si dim. anche che ogni superficie regolare <u>compatta</u> è orientabile (1969).