Corso di Laurea in LOGOPEDIA

FISICA ACUSTICA

ONDE (ARMONICHE)

Fabio Romanelli

Department of Mathematics & Geosciences

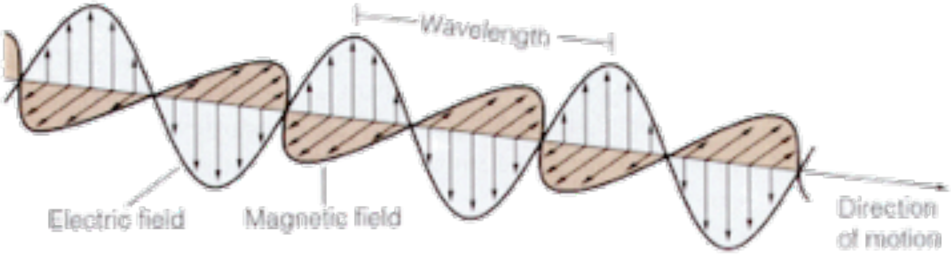
University of Trieste

Email: romanel@units.it

Onde

Le onde ci sono familiari - onde marine, elettromagnetiche - ma sappiamo cos'è un'onda ?

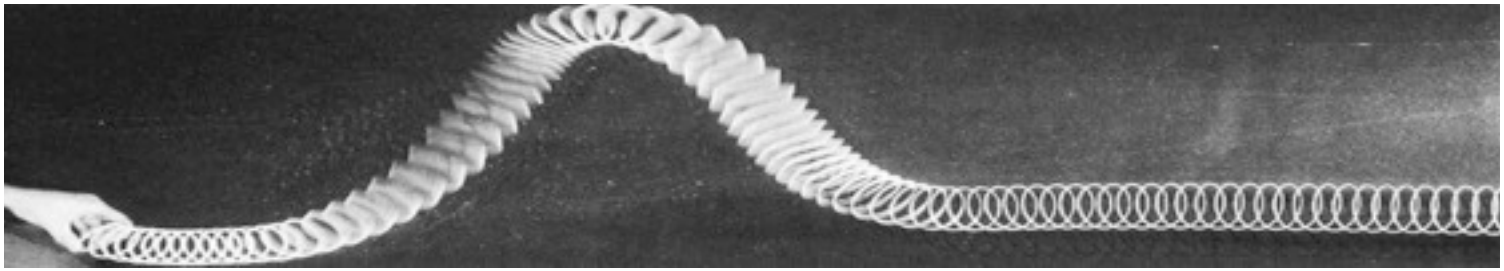
Le onde trasportano energia attraverso lo spazio senza trasportare materia



Ciò che interpretiamo come un'onda è il propagarsi di una perturbazione nel mezzo

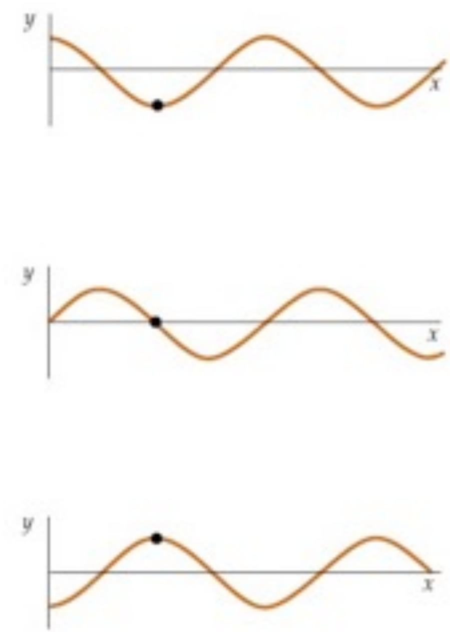
Moto ondoso semplice - 1

Onde Trasversali: la perturbazione è perpendicolare al moto



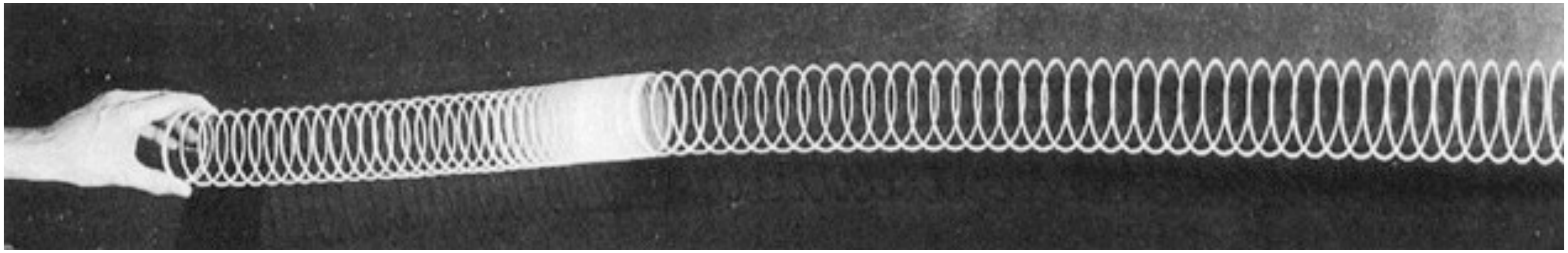
Segmenti del mezzo (corda) si muovono perpendicolari al moto ondoso

Esempi: onde su una corda, onde elettromagnetiche, onde sismiche S



Moto ondoso semplice - 2

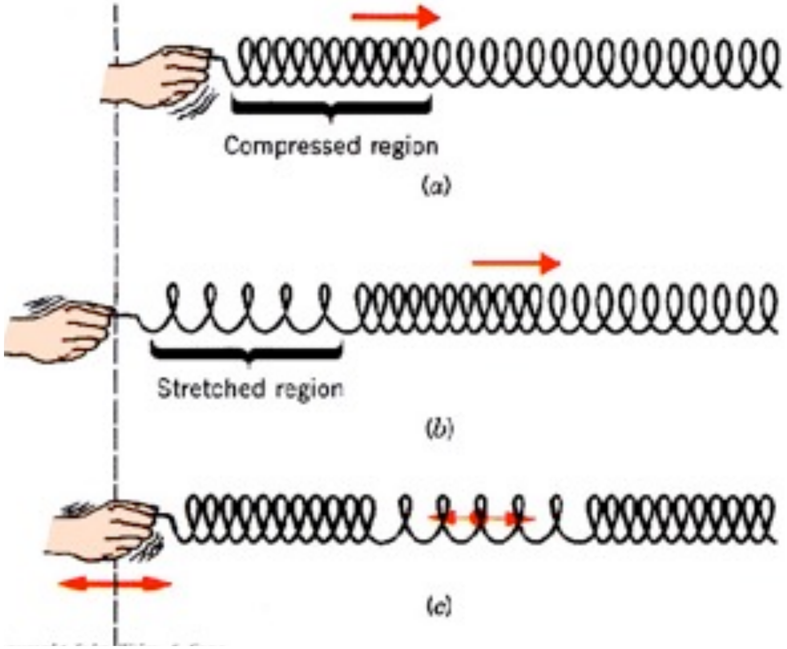
onde longitudinali: la perturbazione è parallela al moto



Segmenti del mezzo si muovono paralleli al moto ondoso

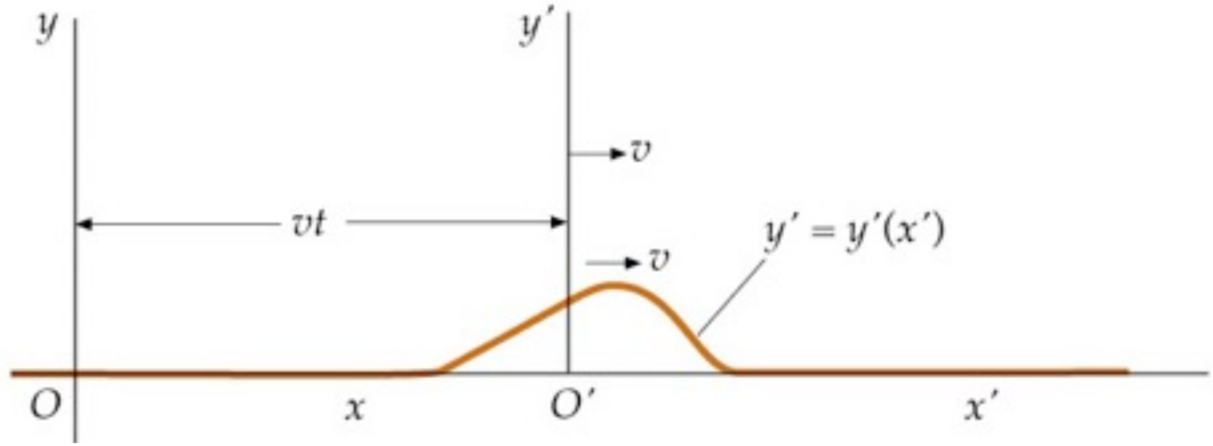
Il mezzo è alternativamente compresso e rarefatto

Esempi: suono nei fluidi, onde sismiche P



La funzione d'onda

Questa è una descrizione matematica di un'onda progressiva



Si consideri un'onda trasversale su di una corda che si muove lungo l'asse x con velocità costante v.

Lo spostamento trasversale della corda è y, massimo = y_m

Ad un certo tempo t più tardi, l'impulso sarà vt più lontano sulla corda, ma la sua forma è invariata

La forma dell'impulso può essere descritta da $y = f(x)$

Se la forma non varia rispetto al tempo, lo spostamento y, per tutti gli istanti successivi rispetto all'origine, come:

$y = f(x - vt)$ per un'onda che si sposta a destra

$y = f(x + vt)$ per un'onda che si sposta a sinistra

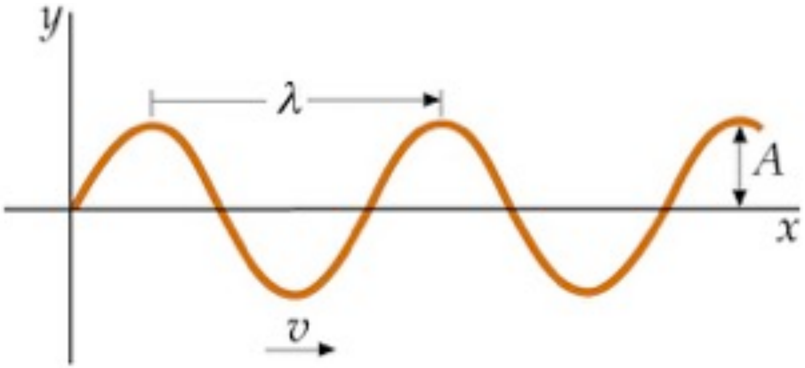
Lo spostamento y viene solitamente chiamato

FUNZIONE D'ONDA

e solitamente denotato come $y(x,t)$

Onde armoniche

Un' onda armonica ha una forma sinusoidale, e spostamento y all'istante t=0



$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

A è l'ampiezza dell'onda e λ è la lunghezza d'onda (distanza tra due creste)

Se l'onda si muove verso destra con velocità v, la funzione d'onda al tempo t è data da

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

Periodo, lunghezza d'onda, velocità

Il tempo impiegato per percorrere una lunghezza d'onda è il periodo T. La velocità, lunghezza d'onda e periodo sono legati da:

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} \quad ; \quad \lambda = vT}$$

$$\therefore \quad y = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

La funzione d'onda mostra la natura periodica di y:

ad ogni tempo t, y assume gli stessi valori per x, x+λ, x+2λ…

ad ogni x, y assume gli stessi valori per t, t+T, t+2T……

E' conveniente esprimere la funzione d'onda armonica definendo il **numero d'onda k**, e la **frequenza angolare** ω

$$\text{dove} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{\therefore \quad y = A\sin(kx - \omega t)}$$

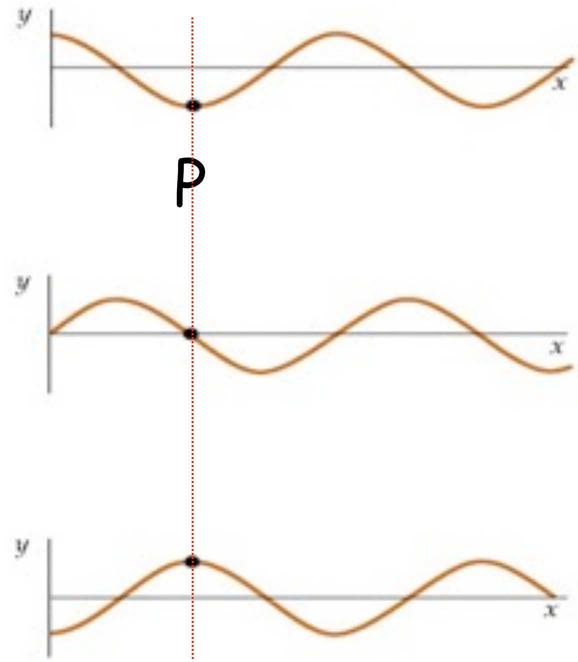
assumendo che lo spostamento sia 0 per x=0 e t=0. Se ciò non avviene, in generale si ha:

$$y = A\sin(kx - \omega t - \phi)$$

dove ϕ è la **costante di fase** determinata dalle condizioni iniziali.

La funzione d'onda può essere usata per descrivere il moto di ogni punto P.

$$y = A\sin(kx - \omega t)$$



Velocità trasversale v_y

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\text{costante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

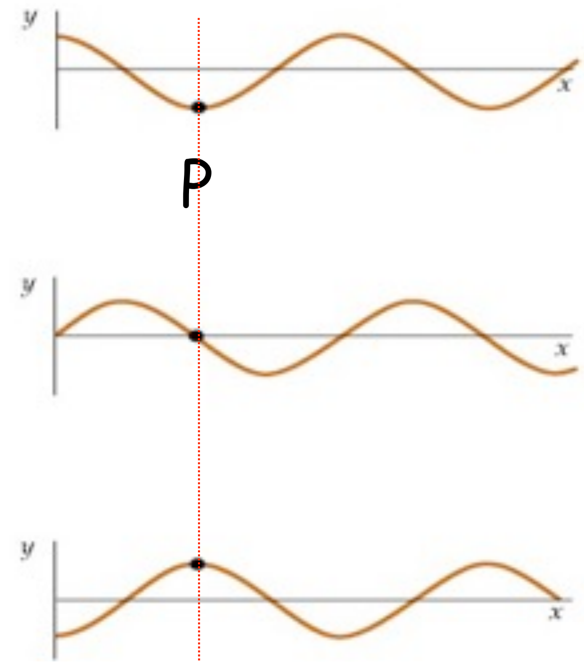
che assume il massimo valore $(v_y)_{max} = \omega A$ quando $y = 0$

Accelerazione trasversale a_y

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right|_{x=costante}$$

$$= \frac{\partial v_y}{\partial t}$$

$$= -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$



che assume il valore massimo $(a_y)_{max} = \omega^2 A$ quando $y = -A$

NB: la coordinata x di P è costante

Esempio

Un'onda armonica su di una corda è data da

$$y(x,t) = 10\sin(2x - 5t)$$

dove l'ampiezza è in mm, k in rad m^{-1}, e ω in rad s^{-1}

(a) Si determini la velocità e l' accelerazione per ogni elemento della corda.

(b) Quali sono i valori massimi dell' accelerazione e della velocità ?

(c) Lo spostamento è +ve o -ve per x=1m e t=0.2s ?

(a) Si determini la velocità e l' accelerazione per ogni elemento della corda.

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \quad \therefore \quad v_y = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

$$y(x,t) = 10\sin(2x - 5t)$$

$$\therefore \quad v_y = -5 \times 10\cos(2x - 5t)$$

$$v_y = -50\cos(2x - 5t)$$

$$\therefore \quad v_y = -\omega^2 A\sin\left(kx - \omega t\right)$$

$$\therefore \quad a_y = -5^2 \times 10\sin(2x - 5t)$$

$$a_y = -250\sin(2x - 5t)$$

(b) Quali sono i valori massimi dell' accelerazione e della velocità ?

$$(a_y)_{max} = \omega^2 A$$
$$(a_y)_{max} = 5^2 \times 10$$
$$(a_y)_{max} = 250 mms^{-2}$$

$$(v_y)_{max} = \omega A$$
$$(v_y)_{max} = 5 \times 10$$
$$(v_y)_{max} = 50\, mms^{-1}$$

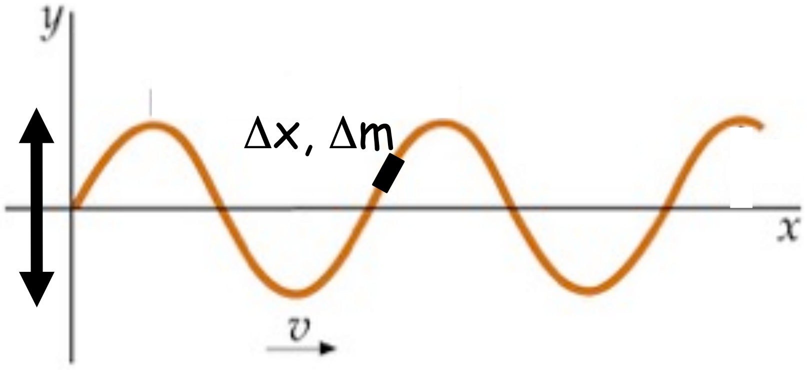
(c) Lo spostamento è +ve o -ve per x=1m e t=0.2s?

$$y(1,0.2) = 10 \sin((2x1) - (5x0.2))$$
$$y(1,0.2) = 8.415$$

Lo spostamento è +

Energia delle onde

Si consideri un'onda armonica propagantesi su di una stringa.



La sorgente di energia è un agente esterno alla sinistra che produce energia producendo oscillazioni.

Si consideri un piccolo segmento, lungo Δx e di massa Δm.

Il segmento si muove verticalmente con SHM, frequenza ω e ampiezza A.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

(dove k è la costante legata alla forza di richiamo)

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

Applicata al piccolo segmento, l'energia totale è

$$\Delta E = \frac{1}{2} (\Delta m)\, \omega^2 A^2$$

Se μ è la massa per unità di lunghezza, l'elemento Δx ha massa $\Delta m = \mu\, \Delta x$

$$\Delta E = \frac{1}{2} (\mu\, \Delta x)\, \omega^2 A^2$$

Se l'onda si propaga da sinistra a destra, l' energia ΔE proviene dal lavoro fatto sull' elemento Δm_i dall' elemento Δm_{i-1} (alla sinistra).

Similarmente Δm_i compie lavoro sull' elemento Δm_{i+1} (alla destra), e quindi l' energia si trasmette a destra.

Il tasso a cui l'energia viene trasmessa lungo la corda è la potenza ed è data da dE/dt.

Se Δx -> 0 allora

$$\text{Potenza} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mu \frac{dx}{dt}\right)\omega^2 A^2$$

ma dx/dt = velocità

$$\therefore \quad \text{Potenza} = \frac{1}{2}\mu\, \omega^2 A^2 v$$

$$\text{Potenza} = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 A^2 v$$

La potenza trasmessa da un'onda armonica è proporzionale a:

(a) la velocità dell'onda v

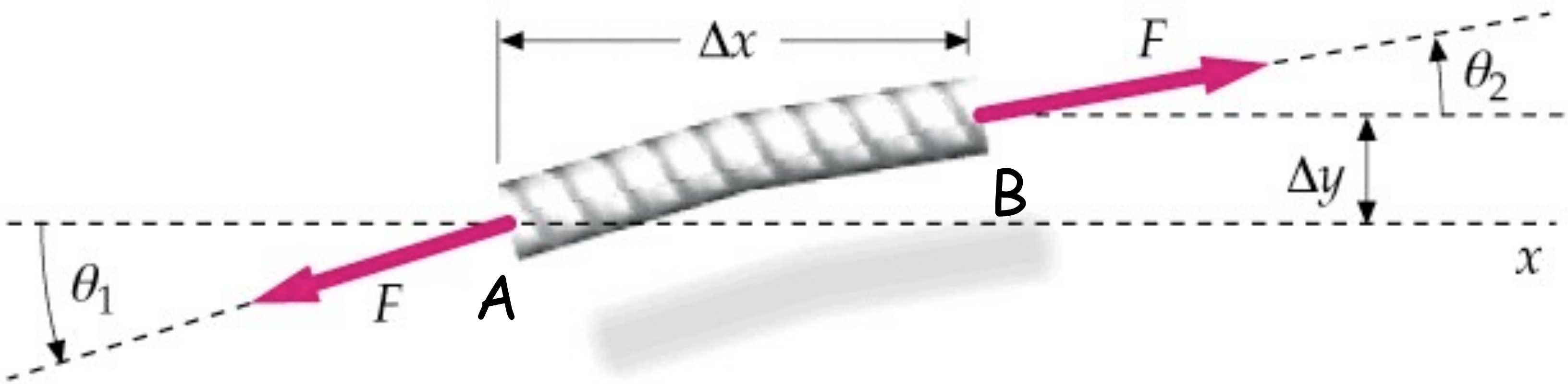
(b) il quadrato della frequenza angolare ω

(c) il quadrato dell'ampiezza A

Tutte le onde armoniche godono delle seguenti proprietà:

La potenza di un'onda armonica è proporzionale al quadrato della frequenza ed al quadrato dell'ampiezza.

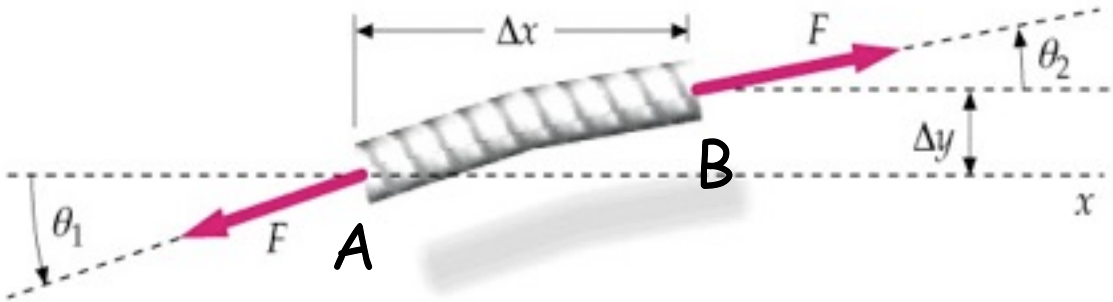
Derivazione dell'equazione d'onda



Si consideri un piccolo segmento di corda, di lunghezza Δx, con tensione F su cui si sta propagando un'onda.

Gli estremi della corda formano angoli piccoli θ_1 e θ_2 con l'asse x.

Lo spostamento verticale Δy è molto piccolo se confrontato con la lunghezza della corda



Risolvendo le forze verticali, di richiamo lungo y

$$F_y = F\sin\theta_2 - F\sin\theta_1$$
$$= F(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

Dall'approssimazione per piccoli angoli si ha che $\sin\theta \sim \tan\theta$

$$F_y = F(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

La tangente dell'angolo in A (o in B) =

pendenza della curva in A (o in B)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{A(B)}$$

$$F_y = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right]$$

Si applichi ora la legge di Newton al segmento considerato

$$F_y = ma = \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$

$$\mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right]$$

$$\frac{\mu}{F}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right]}{\Delta x}$$

$$\frac{\mu}{F}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \frac{\left[\left(\partial y/\partial x\right)_B - \left(\partial y/\partial x\right)_A\right]}{\Delta x}$$

La derivata (parziale) di una funzione è definita come:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x}$$

Se si associa $f(x+\Delta x)$ con $\left(\partial y/\partial x\right)_B$ e $f(x)$ con $\left(\partial y/\partial x\right)_A$

se Δx -> 0

$$\boxed{\frac{\mu}{F}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

che è l'equazione d'onda lineare per una corda

Soluzioni armoniche dell'equazione d'onda

Si consideri una funzione d'onda $y(x,t) = A \sin(kx-\omega t)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

e sostituendo nell'equazione d'onda

$$\frac{\mu}{F}(-\omega^2 A \sin(kx - \omega t)) = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\mu}{F}\omega^2 = k^2$$

Usando la relazione $v = \lambda/T = \omega/k$, $v^2 = \omega^2/k^2 = F/\mu$,

$$v = \sqrt{F/\mu} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Forma generale

Sovrapposizione di onde

Quando due onde si incontrano nello spazio le perturbazioni individuali (rappresentate dalle funzioni d'onda) si sovrappongono addizionandosi.

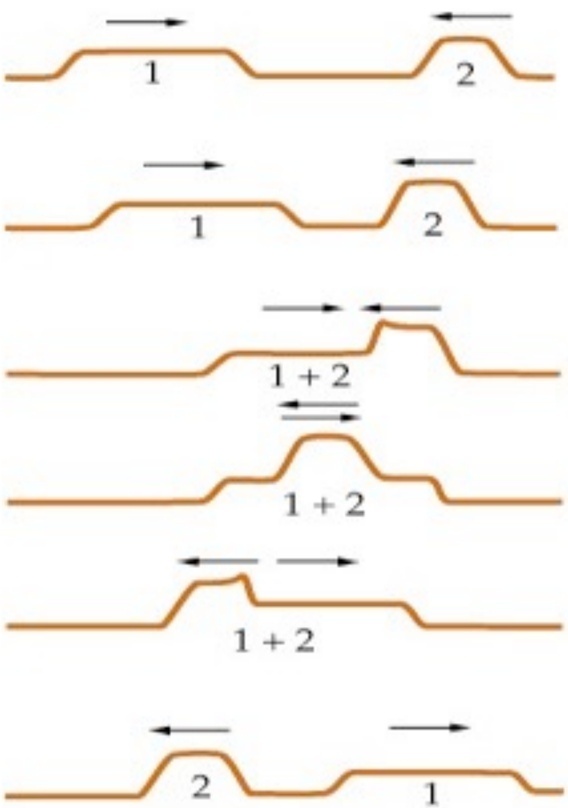
Il principio di sovrapposizione afferma:

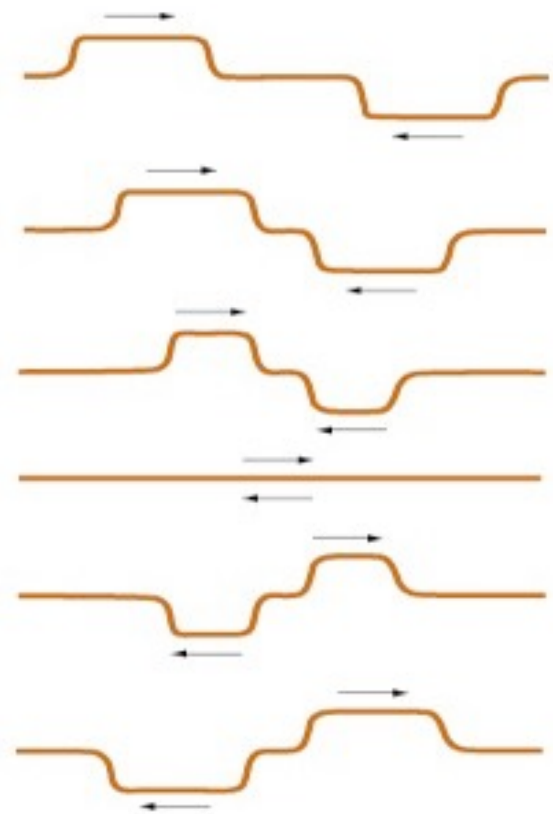
Se due o più onde progressive si muovono in un mezzo, la funzione d'onda risultante in ogni punto del mezzo è la somma algebrica delle funzioni d'onda delle onde individuali

Onde che obbediscono a questo principio sono dette

ONDE LINEARI, altrimenti **ONDE NON LINEARI**

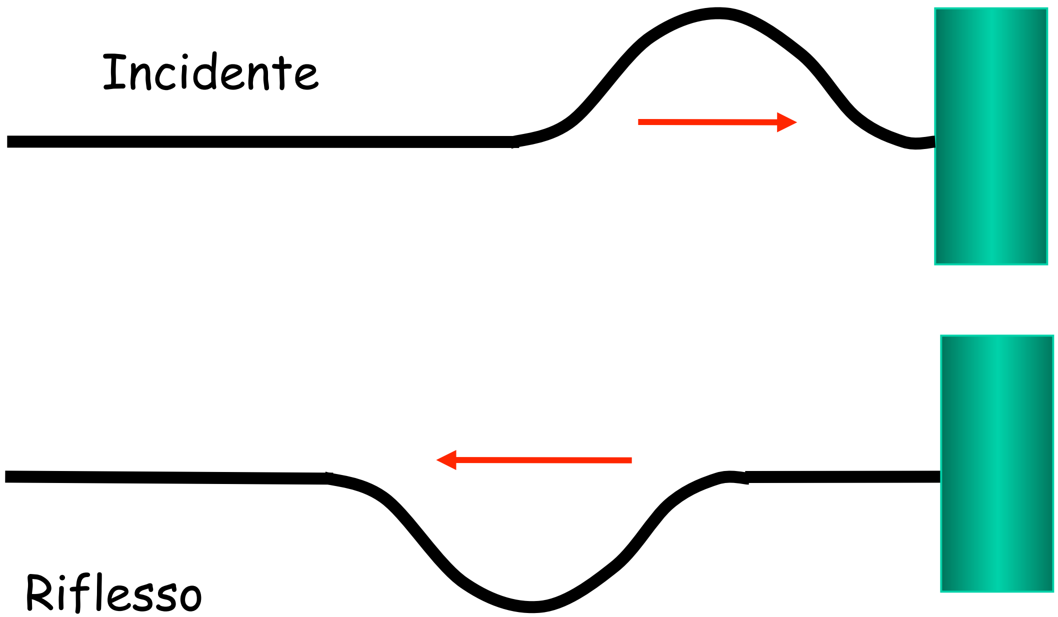
Una conseguenza è che due onde progressive in un mezzo passano attraverso l'un l'altra senza essere alterate





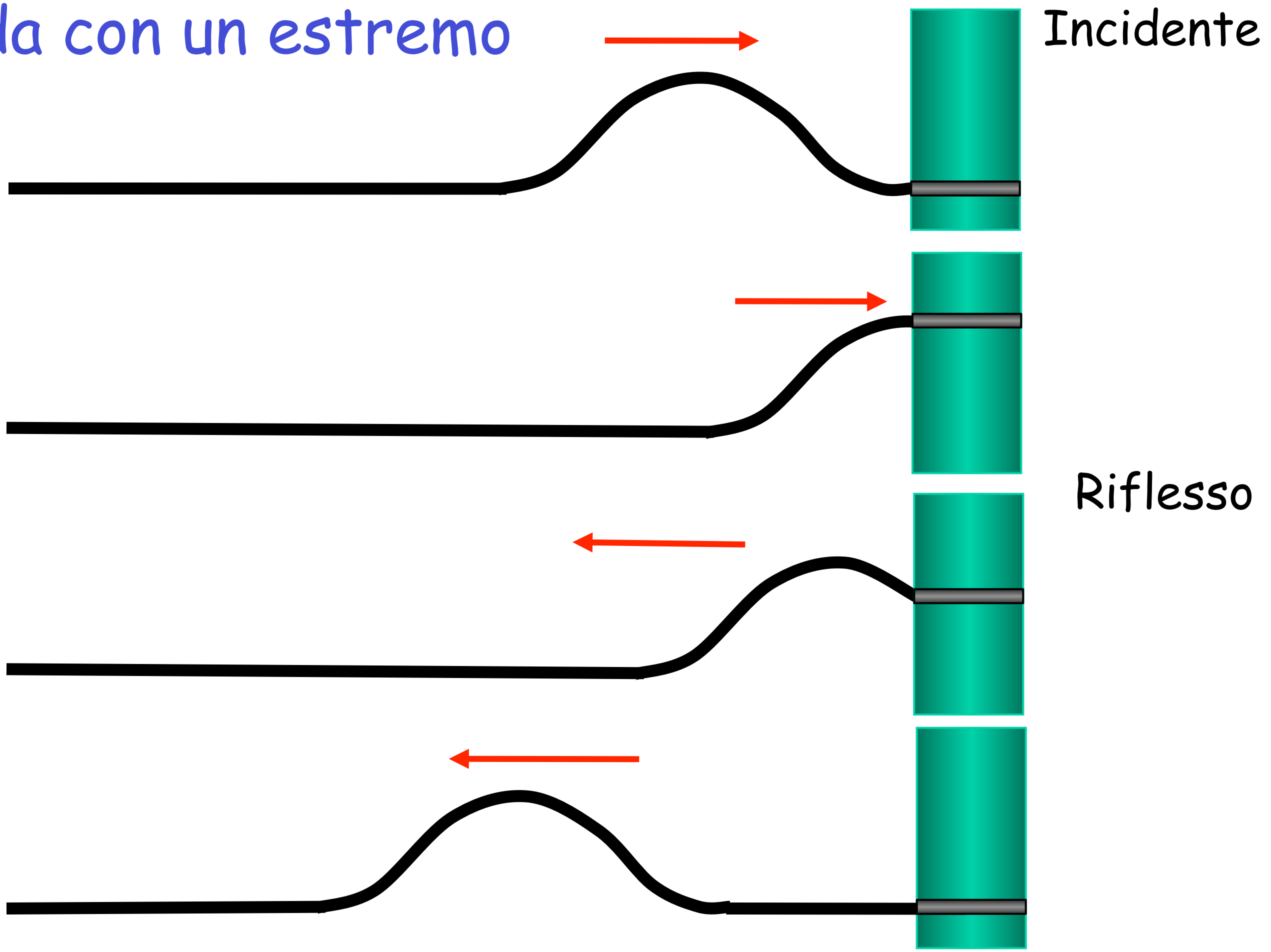
Riflessione di onde progressive

Impulso che si propaga in una corda con un estremo fisso

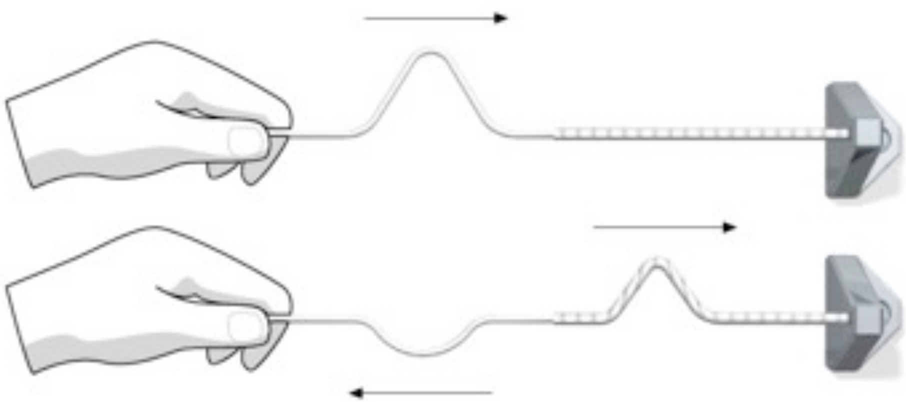


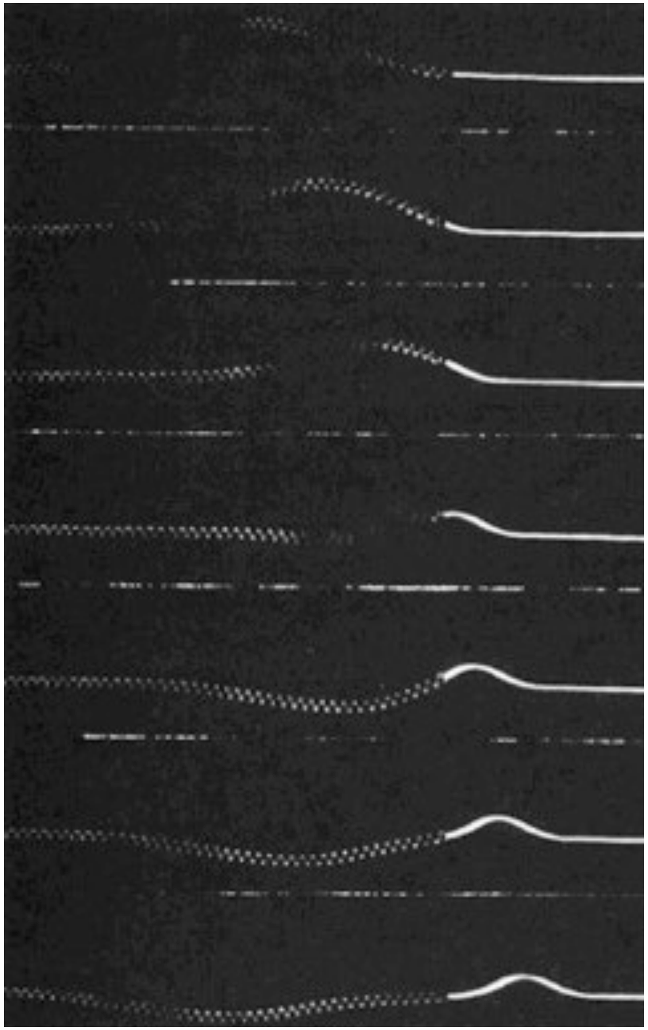
NB. si assume che il muro sia rigido e che l'onda non gli trasmetta alcun disturbo

Impulso che si propaga su di una corda con un estremo libero



Impulso che si propaga su di una corda leggera connessa con una più pesante





Impulso che si propaga su di una corda pesante connessa con una più leggera