$\boxed{\text{LEZIONE 31}}$ 15/11/17

V sp. vett. $/\mathbb{R}$, $\dim(V) = n$. $f: V \to V$ endomorfismo.

$\mathcal{B}$ base (ordinata) di V $\quad A = M_{\mathcal{B}}(f) \ \left(= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right)$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ il polinomio caratteristico di A.

$\mathcal{C}$ sia un'altra base (ord.) di V $\quad B = M_{\mathcal{C}}(f)$

PBL: in che relazione sono tra loro i polinomi

$p_A(\lambda)$ e $p_B(\lambda)$?

Ricordiamo, innanzitutto, in che relazione sono tra loro le matrici A e B.

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] & V_{\mathcal{B}} \arrow[d, "id_V"] \\
V_{\mathcal{C}} \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"'] & V_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

$$B = M_{\mathcal{C}}(f) = \underbrace{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_V)}_{= P^{-1}} \cdot \overbrace{M_{\mathcal{B}}(f)}^{A} \cdot \underbrace{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_V)}_{\overset{def}{=} P}$$

P e P^{-1} sono matrici di cambiamento di base.

Dunque $\underline{B = P^{-1}AP} \Rightarrow$

$PB = PP^{-1}AP = AP \Rightarrow PBP^{-1} = APP^{-1} = A$

Passaggio "cosmetico" $Q \overset{def}{=} P^{-1} \Rightarrow Q^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$ e $A = Q^{-1}BQ$

Def. Date due matrici quadrate $n \times n$ A, B diremo che A è SIMILE (a B) se esiste $P \in GL(n, \mathbb{R})$ RICORDARE chi è tale che

$B = P^{-1}AP$

Il calcoletto fatto sopra mostra che "se A è simile a B allora B è simile ad A". È chiaro che $A = I_n^{-1} A I_n$, cioè "ogni matrice è simile a sé stessa". Infine, sia A simile a B e B simile a C. Cioè esistono due matrici invertibili P, Q $n \times n$ tali che $B = P^{-1}AP$ e

$C = Q^{-1}BQ$. Ma allora

$$C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

Quindi A è simile a C.
Abbiamo verificato che la relazione "A è simile a B" nell'insieme di tutte le matrici $n\times n$ è una relazione di equivalenza.

Vediamo la relazione tra $p_A(\lambda)$ e $p_B(\lambda)$

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = \otimes$$

$$\lambda I_n = (\lambda I_n) I_n = (\lambda I_n) P^{-1}P \underset{?}{=} P^{-1}(\lambda I_n)P$$

~~[illegible]~~ Pensiamo così (ricordare le matrici elementari $M_{i,c}$)

$$\lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Quindi, se M è una qualsiasi matrice $n\times n$, allora $(\lambda I_n)M$ è la matrice ottenuta moltiplicando ogni <u>riga</u> di M per λ (NB questo funziona anche se $\lambda = 0$).
Inoltre, $M(\lambda I_n)$ è la matrice ottenuta moltiplicando ogni <u>colonna</u> di M per λ (anche qui: OK anche per $\lambda = 0$). Dunque

$$(\lambda I_n)P^{-1} = P^{-1}(\lambda I_n)$$

e si ha

$$p_B(\lambda) = \otimes = \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I_n)P) =$$

propr. distributiva del prodotto R×C risp. somma di matrici

$$= \det\big(P^{-1}(A - \lambda I_n)P\big) \overset{\text{t. Binet}}{=} \underbrace{\det(P^{-1})}_{= \frac{1}{\det(P)}} \cdot \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{= p_A(\lambda)} \cdot \det(P) =$$

$$= p_A(\lambda)$$

$$\boxed{p_B(\lambda) = p_A(\lambda)}$$

Quindi il polinomio caratteristico è legato all'endomorfismo f piuttosto che alla matrice che lo rappresenta. Scriveremo $p_f(\lambda)$ piuttosto che $p_A(\lambda)$.

RICERCA DEGLI AUTOVETTORI

Supponiamo che l'endomorfismo $f: V \to V$ ammetta autovalori. Sia $a \in \mathbb{R}$ uno di questi, cioè $p_f(a) = 0$ | vedi sopra. Più precisamente, sia

$$p_f(\lambda) = (\lambda - a)^m g(\lambda) \quad \text{con} \quad g(a) \neq 0 \qquad m_{alg}(a)$$

$1 \leq m \leq n$ m : molt. algebrica dell'autovalore a di f.

Allora

$$\{\text{autovettori di } f \text{ rel. ad } a\} \underbrace{\cup \{0_V\}}_{} = \mathrm{Ker}(f - a\, id_V) = W_a$$

per definizione, ogni autovettore è $\neq 0_V$ SPIEG.

W_a è detto AUTOSPAZIO relativo all'autovalore a di f.

Un dato importante è $\dim(W_a)$

Def. Diremo molteplicità GEOMETRICA dell'autovalore a di f, il numero $\dim(W_a)$ $m_{geom}(a)$

Si osservi che, per definizione $\dim(W_a) \geq 1$.

PROPOSIZIONE

Per ogni autovalore a di f si ha $m_{geom}(a) \leq m_{alg}(a)$

Dim.

Per conoscere $m_{alg}(a)$ dobbiamo conoscere $p_f(\lambda)$.

Per conoscere (= "calcolare") $p_f(\lambda)$ dobbiamo rappresentare f mediante una matrice $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, quindi in definitiva dobbiamo fissare una base $\mathcal{B}$ di V.

L'idea è di fissare una base $\mathcal{B}$ che "tenga conto" del sottospazio vettoriale W_a di V. Allora sappiamo come fare:

fissiamo una base $v_1, \dots, v_r$ di W_a (dunque $r = m_{geom}(a)$), e poi la completiamo ad una base $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ di V.

Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$, base ordinata. Allora

$$
A = M_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{cccc|c}
a & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & a & & \vdots & \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & * \\
0 & 0 & \cdots & a & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & B \\
0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
f(v_1) & \cdots & f(v_r) & f(v_{r+1}) & \cdots & f(v_n) \\
\| & & \| & & & \\
a v_1 & & a v_r & & &
\end{array}
$$

non ha importanza

B è matr. $(n-r)\times(n-r)$

Pertanto:

$$
p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \left[\begin{array}{cccc|c}
a-\lambda & & & & \\
& a-\lambda & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & a-\lambda & \\
\hline
& O & & & B-\lambda I_{n-r}
\end{array}\right] \overset{\text{SPIEG.}}{=}
$$

$$
= (a-\lambda)^r \det(B - \lambda I_{n-r}) = (a-\lambda)^r q(\lambda) = \underbrace{(-1)^r}(\lambda - a)^r q(\lambda)
$$

si può "incorporare" qui

■

L'enunciato dice $m_{geom}(a) \le m_{alg}(a)$ perché potrebbe benissimo essere $q(a) = 0$.

Per determinare effettivamente W_a si procede così. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ per una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V. Allora $A - aI_n = M_{\mathcal{B}}(f - a\,id_V)$

Allora, rispetto alla base $\mathcal{B}$,

$W_a = \ker(f - a\, id_V)$ corrisponde allo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ dato da tutte le soluzioni del SLO

$$(A - a I_n) X = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\sim]{K_{\mathcal{B}}} & \mathbb{R}^n \\ \cup & & \cup \\ W_a & \longrightarrow & \{\text{sol. dello SLO}\} \end{array}$$

Quindi:

$$m_{geom}(a) = \dim(W_a) \underset{\uparrow}{=} n - rg(A - a I_n)$$

SPIEGARE

<u>Def.</u> $f: V \longrightarrow V$ è detta <u>DIAGONALIZZABILE</u> se esiste una base di V tutta costituita da autovettori di f. Indichiamo con $\mathcal{C}$ tale base.

Allora

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_1 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} a_2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_2 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} a_q & & \\ & \ddots & \\ & & a_q \end{matrix} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} i \neq j \\ \Downarrow \\ a_i \neq a_j \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{m_{alg}(a_1)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{m_{alg}(a_2)} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{m_{alg}(a_q)}$$

Questo ha due notevoli conseguenze.

$$p_f(\lambda) = (-1)^n (\lambda - a_1)^{m_1} \cdot \_\_\_\_ \cdot (\lambda a_q)^{m_q}$$

cioè

- il polinomio caratteristico $p_f(\lambda)$ di f si scompone <u>completamente</u> nel prodotto di polinomi di grado 1, cioè del tipo $\lambda - a$ con <u>$a \in \mathbb{R}$</u>

Per capire meglio ricordiamo l'esempio visto ieri

$$f = L_A \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = -(\lambda-2)\underbrace{(\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4)}_{\text{ha } \Delta < 0}$$

Allora

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)\underbrace{(\lambda - (\sqrt{3}+i))}\underbrace{(\lambda - (\sqrt{3}-i))}$$

su $\mathbb{C}$ si arriva <u>sempre</u> ad una scomp. in fattori di questo tipo.

sono ancora del tipo "$\lambda - a$", ma stavolta $a \in \mathbb{C}$ e $a \notin \mathbb{R}$

Una conseguenza è che

(4) $m_{alg}(a_1) + \text{---} + m_{alg}(a_q) = n$ il grado di $p_f(\lambda)$

L'altra conseguenza della forma della matrice $M_B(f)$ è che

- per ogni autovalore a_i di f si ha che

$$\boxed{m_{geom}(a_i) = m_{alg}(a_i)}$$

SPIEGARE

Messa insieme questa relazione con (4) otteniamo

$$m_{geom}(a_1) + \text{---} + m_{geom}(a_q) = \dim(V)$$

ESERCIZIO (4/7/16) È data la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{dove } a, b \in \mathbb{R}$$

Determinare tutti i valori a, b per cui M è diagonalizzabile, ed in questi casi determinare una matrice diagonale M' simile ad M, ed una matrice invertibile P ~~3x3~~ tale che $M' = P^{-1} M P$.

Sia $f = L_M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad M = M_{\mathcal{B}_c}(f)$ $\quad M$ "dice" che

$f(e_1) = e_1 \quad f(e_2) = e_2 \Rightarrow$ uno degli autovalori di f è $\lambda = 1$

ed il relativo autospazio W_1 contiene e_1, e_2

$\Rightarrow \dim(W_1) \geq 2$

$p_f(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - b)$

Se $\underline{\underline{b \neq 1}}$ allora $\lambda = b$ è autovalore di molt. alg. 1

Allora $1 \leq \dim(W_b) \leq \mu_{alg}(b) = 1 \implies \underline{\underline{\dim(W_b) = 1}}$

W_b è l'autospazio di f relativo all'autovalore b.

Dunque in questo caso M è diagonalizzabile e

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Se $a = 0$ M è già diagonale. Quindi nel seguito supporremo $\underline{a \neq 0}$

Determino W_b

$$M - b I_3 = \begin{bmatrix} 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi W_b è lo spazio di tutte le soluzioni del SLO

$$\begin{cases} (1-b)x = 0 \\ (1-b)y + az = 0 \end{cases}$$

Una soluzione non banale è $\begin{vmatrix} 0 \\ a \\ b-1 \end{vmatrix}$

Quindi una base di $\mathbb{R}^3$ tutta formata da autovettori di f è

$$\mathcal{E} = \left(e_1 , e_2 , \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ a \\ b-1 \end{vmatrix}}_{v_3} \right)$$

e_1, e_2 è base di W_1

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_c \ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f", "M"'] & \mathbb{R}^3 \ \mathcal{B}_c \arrow[d, "P^{-1}"', "id"] \\
\mathcal{E} \ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "id", "P"'] \arrow[r, "M'", "f"'] & \mathbb{R}^3 \ \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

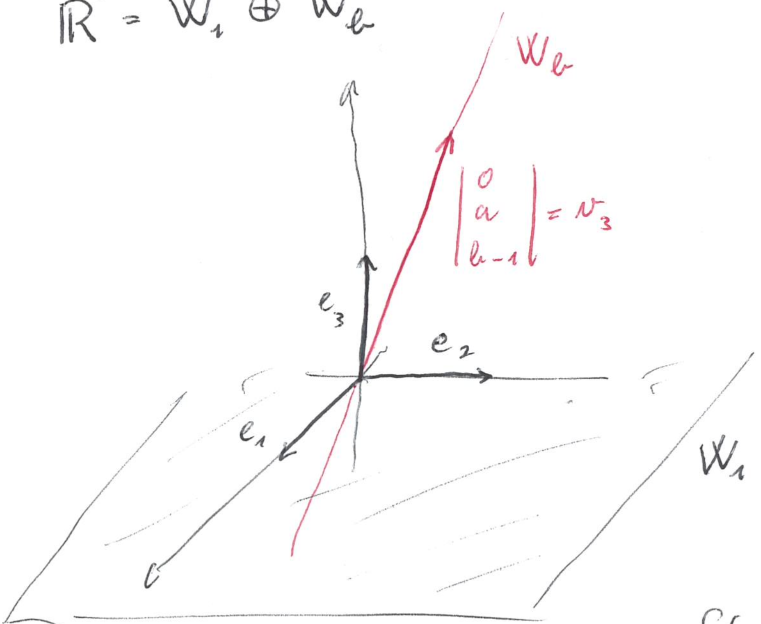
$$P = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}_c}(id) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} id(e_1) & id(e_2) & id(v_3) \end{matrix} \end{array}$$

Calcolo P^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b-1} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{1-b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b-1} \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{1-b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_b$



$f|_{W_1} = id_{W_1}$

$f|_{W_b}$ è la moltiplic. per b

$u \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi

$u = u' + u''$ $\quad u' \in W_1 , u'' \in W_b$

$f(u) = f(u' + u'') = f(u') + f(u'') =$

$= u' + b u''$