V sp. vett. $/\mathbb{R}$ $\dim(V)=n$ $f: V \to V$ endomorfismo.

<u>VOLEVAMO VEDERE</u> se era possibile "smontare" f in "pezzi" semplici, allo scopo di capire meglio f. Più precisamente volevamo vedere se esistevano sottospazi vettoriali $W_1, \dots, W_r$ di V tali che:

1) $V = W_1 + W_2 + \dots + W_r$ ← è conseguenza di
2) ogni $v \in V$ si può scrivere come $v = w_1 + \dots + w_r$ con $w_h \in W_h$ $\forall h$, in modo <u>unico</u>.

per brevità, se valgono queste due condizioni scriveremo $\underline{V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r}$

3) $f(W_h) \subset W_h$ $\forall h$ cioè $f|_{W_h}: W_h \to W_h$, ovvero $f|_{W_h}$ è un endomorfismo di W_h

La speranza è che questi $f|_{W_h}$ siano "semplici" da capire. Una possibilità (ne vedremo qualche altra) è richiedere che

4) $\forall h = 1, \dots, r$ $W_h \rightsquigarrow a_h \in \mathbb{R}$ tale che $\underbrace{f(u) = a_h u}_{\text{si capisce "intuitivamente" come funziona}}$ (1) $\forall u \in W_h$.

È implicito in tutto questo discorso che

0) $W_h \neq \{0_V\}$ $\forall h$, cioè $\dim(W_h) \geq 1$ $\forall h$

$\dim(W_h) = m_g(a_h)$ <u>molteplicità geometrica</u> di a_h

<u>Supponiamo</u> che valgano tutte queste condizioni:

$\forall h = 1, \dots, r$ sia $\mathcal{B}_h = \{v_{h,1}, \dots, v_{h, m_g(a_h)}\}$ una base di W_h

Sia $\mathcal{B} \subset V$ l'unione di tali basi.

Dalla condizione 1) segue che $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per V. La condizione 2) ed il fatto che ogni $\mathcal{B}_h$ è base di W_h mi dicono che ogni vettore di V si può scrivere <u>in un unico</u> modo come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$. In particolare questo vale per 0_V, quindi gli el.ti di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti.

Dunque <u>$\mathcal{B}$ è una base di V.</u> Ordino $\mathcal{B}$ in questo modo

$$\mathcal{B}=(\underbrace{v_{1,1},\dots,v_{1,m_g(a_1)}}_{a_1},\ \underbrace{v_{2,1},\dots,v_{2,m_g(a_2)}}_{a_2},\dots,\underbrace{v_{r,1},\dots,v_{r,m_g(a_r)}}_{a_r})$$

La base $\mathcal{B}$ è tutta formata da autovettori di f, cioè vale la condizione (1). Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_1\end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}a_2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_2\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}a_r & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{matrix}\end{array}\right] & \begin{matrix} v_{1,1} \\ v_{1,m_g(a_1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{r,m_g(a_r)}\end{matrix} \\ \underbrace{f(v_{1,1})\ \dots}_{m_g(a_1)}\ \underbrace{\qquad\quad}_{m_g(a_2)}\ \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{m_g(a_r)} & \end{array} \qquad (2)$$

$M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice <u>DIAGONALE</u> : $B=[b_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ è m. diagonale se $i\neq j \Rightarrow b_{ij}=0$

Il fatto che $M_{\mathscr{B}}(f)$ sia diagonale ha dato il nome a tutto il procedimento: si chiama
<u>DIAGONALIZZAZIONE</u> dell'endomorfismo f.

Ieri avevamo definito un'endomorfismo f "diagonalizzabile" se esiste una base di V tutta costituita da autovettori di f. Era una definizione data "a freddo", come una legnata nei denti. Oggi abbiamo ricostruito il percorso, la linea di pensiero ("smontare" f in pezzi "semplici"), e così abbiamo potuto vedere che tale definizione, in realtà, è piuttosto sensata.

~o~

La matrice diagonale $M_{\mathscr{B}}(f) =: D$ in (2) ha due conseguenze notevoli:

(i) il polinomio caratteristico di f è

(3) $$p_f(\lambda) = \det(D - \lambda I_n) = (-1)^n (\lambda - a_1)^{m_g(a_1)} \cdots (\lambda - a_r)^{m_g(a_r)}$$

cioè si scompone <u>completamente</u> in prodotto di polinomi lineari (cioè di grado $=1$) $\lambda - a_h$, a coefficienti <u>in $\mathbb{R}$</u>: $1, -a_h \in \mathbb{R}$ $\forall h$.

"Completamente" significa che, dato che il grado di $p_f(\lambda)$ è $n (= \dim(V))$, ci sono n fattori lineari
SPIEGARE

(ii) $\forall h$ con $1 \leq h \leq r$ si ha che: (4) $m_g(a_h) = m_{alg}(a_h)$

Questo è evidente dalla (3), ma ieri alcuni di voi non ne erano convinti. Visto l'approccio seguito ieri, diverso da quello di oggi, il dubbio è comprensibile.

Il punto di partenza di ieri era una <u>base</u> $\mathcal{B}'$ di V, tutta formata da autovettori di f.

Siano $v_1, \dots, v_t \in \mathcal{B}'$ <u>tutti</u> gli autovettori in $\mathcal{B}'$ relativi ad un dato autovalore a di f. Allora, usando $\mathcal{B}'$ per calcolare $p_f(\lambda)$ trovo $p_f(\lambda) = \pm(\lambda - a)^t \cdot g(\lambda)$ con $g(a) \neq 0$ SPIEGARE. Dunque $t = m_{alg}(a)$ per la definizione di molt. algebrica.

Ora $v_1, \dots, v_t \in W_a$ l'autospazio rel. all'autovalore a. Inoltre $v_1, \dots, v_t$ sono linearmente indipendenti. Quindi

$$\dim(W_a) \geq t$$

Il dubbio espresso da alcuni di voi ieri era che potesse essere "$>$", in generale

Ma

$$\dim(W_a) = m_g(a) \leq m_{alg}(a) = t$$

dimostrato ieri

Quindi $\dim(W_a) = t$, quindi $v_1, \dots, v_t$ è una <u>base</u> di W_a.

Ritorniamo al discorso di oggi.

Nei giorni scorsi abbiamo imparato a determinare

- gli autovalori di f; sono le radici del polinomio caratteristico di f, cioè le soluzioni dell'equazione algebrica $p_f(\lambda) = 0$.
- per ciascun autovalore a di f sappiamo trovare il relativo autospazio W_a, quindi ne conosciamo la dimensione $\dim(W_a) = m_g(a)$.

Si può calcolare $p_f(\lambda)$ e ciascuno dei W_a a partire dalla matrice $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ dove $\mathcal{B}$ è una qualsiasi base di V. Quindi siamo sempre in grado di controllare se per un dato endomorfismo le condizioni (i) e (ii) scritte a pag. 3 sono verificate o meno.

TEOREMA Sia $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Consideriamo le proprietà

a) Esiste una base di V tutta costituita da autovettori di f.

b) Valgono entrambe le

(i) $p_f(\lambda)$ si fattorizza completamente in prodotto di polinomi lineari, a coefficienti in $\mathbb{R}$.

(ii) per ogni autovalore $a \in \mathbb{R}$ di f si ha che $m_g(a) = m_{alg}(a)$ $(= m(a)$, tanto sono uguali$)$

Allora a) $\Longleftrightarrow$ b)

Dim. Abbiamo già visto che a) $\Rightarrow$ b).

Verifichiamo il viceversa, cioè che b) $\Rightarrow$ a).

Siano $W_1, \dots, W_r$ gli autospazi di f. Per ogni h con $1 \leq h \leq r$, sia $\mathcal{C}_h = \{v_{h,1}, \dots, v_{h,m(a_h)}\}$ una base di W_h.

Proviamo, innanzitutto, che se $h \neq k$, allora si ha

$W_h \cap W_k = \{0_V\}$. Sia, infatti, $v \in W_h \cap W_k$. Allora

$$a_h v = f(v) = a_k v \Rightarrow \underbrace{(a_h - a_k)}_{\neq 0_{\mathbb{R}}} \cdot v = 0_V \Rightarrow v = 0_V.$$

Quindi gli insiemi $\mathcal{C}_h$ sono a due a due disgiunti.
Sia $\mathcal{C} = \bigcup_{1 \leq h \leq r} \mathcal{C}_h$. Si ha, pertanto

$$\#(\mathcal{C}) = \sum_{1 \leq h \leq r} \#(\mathcal{C}_h) = \sum_h m_{geom}(a_h) \underset{(ii)}{=} \sum_h m_{alg}(a_h) \underset{(i)}{=}$$

$$= \text{grado di } p_f(\lambda) = n = \dim(V)$$

Quindi, se provo che $\mathcal{C}$ è tutto formato da vettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{C}$ è una base di V, tutta formata da autovettori di f. Cioè: vale la a)

Sia, allora

$$\underbrace{\lambda_{1,1} v_{1,1} + \dots + \lambda_{1,m(a_1)} v_{1,m(a_1)}}_{=: w_1 \in W_{a_1}} + \underbrace{\lambda_{2,1} v_{2,1} + \dots + \lambda_{2,m(a_2)} v_{2,m(a_2)}}_{=: w_2 \in W_{a_2}} + \dots = 0_V \quad \text{ecc.}$$

Se $w_h = 0_V$, allora $\lambda_{h,1} v_{h,1} + \dots + \lambda_{h,m(a_h)} v_{h,m(a_h)} = 0_V$

Ma i $v_{h,j}$ sono tutti lin. indipendenti perché formano una base di W_{a_h}. Pertanto $\lambda_{h,j} = 0_{\mathbb{R}}$ $\forall j = 1, \dots, m(a_h)$.

Può accadere che qualche w_k sia $\neq 0_V$?
In tal caso avrei $w_1 + \dots + w_r = 0_V$. Ma abbiamo

visto (Lezione del 13/11, Corollario a pag. 2) che l'unico modo di scrivere 0_V come $u_1 + \ldots + u_r$, dove $u_h \in W_h$ $\forall h$ è che $u_h = 0$ $\forall h$.

Dunque $w_h = 0$ $\forall h$ e la dim. è completa. ∎

<u>COROLLARIO</u> $f : V \to V$ endomorfismo tale che f ha n autovalori <u>distinti</u> $a_1, \ldots, a_n$, dove $n = \dim(V)$. Allora f è diagonalizzabile.

<u>Dim.</u> $p_f(\lambda) = (-1)^n (\lambda - a_1) \ldots (\lambda - a_n)$ e vale la (i).

Per ogni $h = 1, \ldots, n$ si ha, poi:

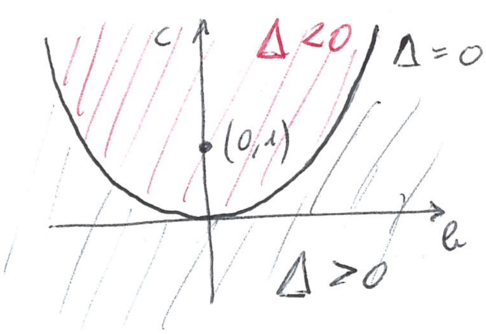
$$1 \le m_g(a_h) \le m_{alg}(a_h) = 1 \implies m_g(a_h) = m_{alg}(a_h)$$

e vale (ii). ∎

<u>OSSERVAZIONE</u>

La situazione nell'enunciato del corollario è quel che succede nel 99,99 % dei casi! Per capirlo vediamo

$n = 2$ $\quad p_f(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c \quad b, c \in \mathbb{R} \quad \Delta = b^2 - 4c$



$\Delta = 0$ cioè $c = \frac{1}{4} b^2$ è una parabola

$(0,1) \rightsquigarrow \lambda^2 + 1 \quad \Delta < 0$

Statisticamente, ci vuole proprio una "sfortuna nera" per capitare in un punto della parabola ...

Cosa succede dal punto di vista delle matrici? Siano

$\mathcal{B}$ base qualsiasi di V $\qquad A = M_{\mathcal{B}}(f)$

$\mathcal{C}$ base di V formata tutta da autovettori di f $\qquad D = M_{\mathcal{C}}(f)$ $\quad D$ è matrice diagonale.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \quad V \arrow[r, "f"] & V \quad \mathcal{B} \arrow[d, "id_V"] \\ \mathcal{C} \quad V \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"'] & V \quad \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

$$D = M_{\mathcal{C}}(f) = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id)}_{P^{-1}} \underbrace{M_{\mathcal{B}}(f)}_{A} \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id)}_{P}$$

P, P^{-1} sono matrici di cambiamento di base

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ $\qquad \mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$

$$P = \begin{array}{c|c} \left[\begin{matrix} & & \\ & & \\ & & \end{matrix}\right] & \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_1 & \quad & v_n \end{matrix} & \end{array}$$

La buona notizia è che, nei casi concreti, ho fatto tutti i miei calcoli mediante la base $\mathcal{B}$!

Quindi quando ho determinato gli autospazi (una loro base, in realtà) ho già scritto i v_j come combinazione lineare degli u_i!! In altre parole, ho già pronte le colonne di P!!!

Poi per trovare P^{-1} uso l'algoritmo.

Si dice che una matrice A $n \times n$ è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale. Cioè, se esiste una matrice $n \times n$ P, invertibile tale che $P^{-1}AP$ è matr. diagonale.

Non si capisce come uno si sia potuto sognare una definizione del genere se non si sa la storia degli endomorfismi che c'è dietro...

OSSERVAZIONI SPARSE

1) $p=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ e $q=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ hanno le stesse radici, cioè 1,2, ma $p\neq q$. Le molteplicità algebriche sono importanti!

2) La matrice diagonale D, se c'è, è quasi unica. Per esempio

AUTOVALORI 2, −2

MOLTEPLICITÀ 1, 3

Possibili matrici D

$$\begin{bmatrix} 2 &&& \\ & -2 && \\ && -2 & \\ &&& -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 &&& \\ & -2 && \\ && -2 & \\ &&& 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 &&& \\ & 2 && \\ && -2 & \\ &&& -2 \end{bmatrix}$$

Dipende da come si ordina la base di autovettori.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad p_f(\lambda) = (2-\lambda)\left[(-5-\lambda)(6-\lambda)+28\right] =$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

3.– Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x+7z \\ 6x+2y-6z \\ -4x+6z \end{pmatrix}$.

i) Si dica se f è diagonalizzabile. In caso affermativo si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f, e si determini anche la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto a tale base.

ii) Si dica se f è un isomorfismo. In tal caso, f^{-1} è diagonalizzabile? Se lo è, chi sono gli autovalori? Chi sono gli autospazi?

4.– Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $P\,(0,-1,1)$, $Q\,(0,1,1)$ ed $R_a\,(a,0,0)$, quest'ultimo dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che il piano affine $L_a \subset \mathbb{R}^3$ passante per P, Q, R_a sia parallelo alla retta affine di equazioni cartesiane

$$r \quad \begin{cases} y & = & 3 \\ x+z & = & 0\,. \end{cases}$$

Si scrivano equazioni parametriche e cartesiane per tale piano, e si calcoli la sua distanza dall' origine.

$\boxed{\lambda = 2}$ $\qquad m_{alg}(2) = 2 \qquad A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$rg(A-2I_3) = 1 \qquad x - z = 0$ definisce W_2

Una base di W_2 è data da $\quad v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad v_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\boxed{\lambda = -1}$ $\qquad m_{alg}(-1) = 1 \qquad A + I_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad rg(A+I_3) = 2$

$\begin{cases} 4x - 7z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad v_3 = \begin{vmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{vmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{vmatrix} \right)$

è base di W_{-1}

$$M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

---

ii) $\lambda=0$ non è autovalore di $f \Longrightarrow \operatorname{Ker}(f)=\{0\}$

$\Rightarrow f$ è iniettiva $\xrightarrow[\text{SPIEG.}]{}$ f è isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
W_2 \arrow[r, shift left, "f|=2\cdot_"] & W_2 \arrow[l, shift left, "f^{-1}=\frac{1}{2}\cdot_"] \\
\oplus & \oplus \\
W_{-1} \arrow[r, "f|=(-1)\cdot_"'] & W_{-1} \arrow[l, bend left, "(f|_{W_{-1}})^{-1}=(-1)\cdot_"]
\end{tikzcd}$$

Quindi: f^{-1} è diagonalizzabile.

e gli autovalori di f^{-1} sono

$\frac{1}{2}$ con autospazio W_2

-1 con autospazio W_{-1}

Gli autospazi sono gli stessi