Esercizi Geometria 3A

13/11/2017

1. Scrivere una parametrizzazione dell'iperboloide a 2 falde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$. Dimostrare che ciascuna delle due falde è diffeomorfa ad un piano, i.e. $\{(x, y, z) \in S; z > 0\}$ è diffeomorfa al piano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.

2. Sia $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$. Individuare i punti critici e i valori critici di f. Per quali valori di c l'insieme $f(x, y, z) = c$ è una superficie regolare?

3. Sia $C = \alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ il supporto dell'elica cilindrica $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Si provi che per ogni punto p dell'asse z esiste uno ed un solo $q(p) \in C$ tale che la semiretta uscente da p e passante per $q(p)$ formi con la direzione negativa dell'asse z un angolo di $\frac{\pi}{4}$. Si ponga $\Sigma :=$ $\{(1 - t)p + tq(p);\ p \in C,\ t \in (0, +\infty)\}$. Si provi che Σ è una superficie.

4. Sia C la traccia di una curva parametrizzata regolare $\alpha: (a, b) \to \mathbb{R}^3$ che non passa dall'origine $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme generato dallo spostamento di una retta l passante per un punto P che si muove in C e l'origine. Descrivere geometricamente l'insieme Σ. Trovare una parametrizzazione φ di Σ. Trovare i punti in cui φ non è regolare. Quali i punti dovrebbero essere rimossi da Σ affinché l'insieme rimanente sia una superficie regolare?

5. Siano $h: (a, b) \to \mathbb{R}^3$, $l : (c, d) \to \mathbb{R}^3$ due curve parametrizzate per lunghezza d'arco; si indichino con h_i, l_i la i-esima componente di h e di l. Si ponga
$$\varphi(u, v) = h(u) + l(v), \qquad (u, v) \in (a, b) \times (c, d) := U$$
Si provi che se $h_1' l_1' > 0$ e $h_2' l_2' < 0$, $\forall\ (u, v) \in U$ allora l'applicazione φ è la parametrizzazione di una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.