Prop. Sia $f: \underset{n}{V} \to \underset{m}{W}$ lineare;

sia A la sua matrice rispetto alle basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Abbiamo
$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"'] & W \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\
K^n \arrow[r, "L(A)"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

Allora $rg(f) = rg\, L(A) = rg\, A$ (per colonne).

Dim.

$rg\, L(A) = \dim Im\, L(A) = \dim Im(L(A) \circ K_{\mathcal{A}}) =$
perché $K_{\mathcal{A}}$ è un isomorfismo
in partic. è suriettivo

diagr. comm. $= \dim Im(K_{\mathcal{B}} \circ f) = \dim K_{\mathcal{B}}(f(V)) =$ $K_{\mathcal{B}}$ è isom.

$= \dim f(V) = rg(f)$.

Teorema $\mathcal{A}$ base di V $\quad v_1, \dots, v_n$
$\mathcal{B}$ base di W $\quad w_1, \dots, w_m$

Allora l'applicazione
$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : Hom(V, W) \longrightarrow M(m \times n, K)$$
$$f \longrightarrow M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$$
è un isomorfismo di spazi vettoriali, cioè lineare e biettivo.

Dim. $\left.\begin{array}{l} M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f+g) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) + M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g) \\ M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}\right\}$ facile

È iniettivo: $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

È suriettivo: data una matrice M, costruisco f t.c. $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = M$, basta associare a

v_i: il vettore che ha la colonna i come coordinate di $f(v_i)$ rispetto a $\mathcal{B}$. Poi si usa il teor. di determinaz. di un'appl. lineare.

Corollario

$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim M(m \times n, K) =$

$= \dim K^{mn} = mn$.

In particolare si ritrova che $\dim V^* = \dim V$.

Teorema Matrice dell'applicazione composta.

Consideriamo $\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow[A]{f} \underset{\mathcal{B}'}{V'} \xrightarrow[B]{g} \underset{\mathcal{B}''}{V''}$ di dim finita, basi

$v_1 \dots v_n \quad v'_1, \dots, v'_m \quad v''_1, \dots, v''_p$

f, g lineari.

Allora $\underset{p \times n}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f)} = \underset{p \times m}{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g)} \; \underset{m \times n}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)} = BA$

prodotto righe per colonne

Dim.

$f(v_k) = a_{1k} v'_1 + \dots + a_{mk} v'_m = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} v'_j$

$g(v'_j) = b_{1j} v''_1 + \dots + b_{pj} v''_p = \sum_{i=1}^{p} b_{ij} v''_i$

Allora $g(f(v_k)) = g\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} v'_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, g(v'_j) =$

$= \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \sum_{i=1}^{p} b_{ij} v''_i = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}\right)}_{\text{elemento di posto d'indici } ik \text{ di } BA} v''_i \; \cancel{\sum (b_{ij})(a_{jk})}$

prod. righe per colonne

Se $f: V \to V$ è un endomorfismo,
dim V finita, si può prendere la stessa base nel dominio e nel codominio.
In tal caso $M^B_B(f)$ si denota $M_B(f)$ semplicemente.

L'isomorfismo
$M_B: Hom(V,V) \longrightarrow M(n \times n, K)$
gode di un'ulteriore proprietà, per il teor. prec.
In entrambi gli spazi vettoriali $Hom(V,V)$ e $M(n \times n, K)$ c'è anche un'operazione interna di prodotto:
- in $Hom(V,V)$ la composizione
- in $M(n \times n, K)$ il prodotto righe per colonne.

Entrambi sono non-commutativi e soddisfano alcune prop. (prod. assoc., esiste elem. neutro, prop. distrib. rispetto alla somma): somma interna, prod. esterno e prod. interno danno struttura di K-algebra.

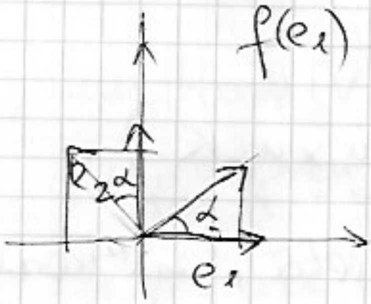
Teorema
M_B è un isomorfismo di K-algebre, cioè conserva anche il prodotto:
$M_B(g \circ f) = M_B(g)\, M_B(f)$.

Si ha anche $L(BA) = L(B) \circ L(A)$, rispetto alle basi canoniche.

Esempio 1.

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad f_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione di angolo α. È l'endom. $L(A)$ che ha come matrice associata risp. alla base canonica $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



E ho un secondo angolo β e considero la ~~r~~rotazione f_β, $f_\beta \circ f_\alpha = f_{\alpha+\beta}$

$$M_{\mathcal{B}}(f_\beta \circ f_\alpha) = M_{\mathcal{B}}(f_{\alpha+\beta})$$

D'altra parte

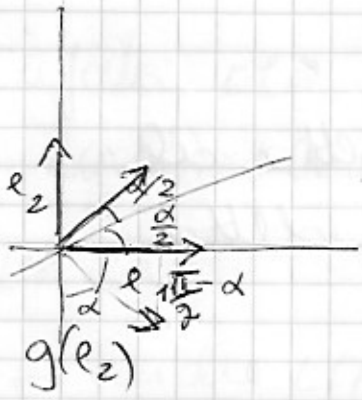
$$M_{\mathcal{B}}(f_\beta) M_{\mathcal{B}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Esempio 2

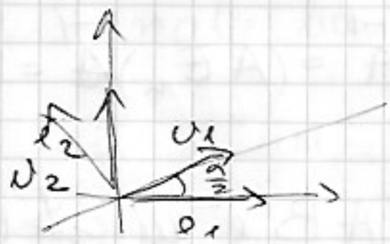
Sia $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la riflessione ~~di~~ su una retta r per O, quella che forma un angolo $\frac{\alpha}{2}$ con l'asse x.



Allora e_1 viene ruotato di α, dunque $g(e_1) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.
Invece $g(e_2)$ ha coordinate $(\sin\alpha, -\cos\alpha)$.

$$M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Se scelgo un'altra base, la matrice si semplifica: scelgo v_1 parallelo alla retta r, e v_2 ortogonale: $\mathcal{B}$



$g(v_1) = v_1$ di coord. $(1,0)$
$g(v_2) = -v_2$ di coord. $(0,-1)$

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa base è più conveniente per descrivere la riflessione.
Come si può cambiare base?

Matrici invertibili

Def. A matrice quadrata, $A \in M(n\times n, K)$ è invertibile se $\exists$ una matrice $A^{-1} \in M(n\times n, K)$ t.c. $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$: matrice identità.

Denotiamo $GL(n,K) \subset M(n\times n, K)$ l'insieme delle matrici $n\times n$ invertibili con entrate in K.

Prop.
$GL(n,K)$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne, detto gruppo generale lineare

Dim.
$GL(n,K)$ è chiuso rispetto al prodotto: siano A, B invertibili: $\exists A^{-1}, B^{-1}$ t.c.
$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$
$BB^{-1} = B^{-1}B = E_n$.

Allora $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AE_n)A^{-1} =$
$= AA^{-1} = E_n$.
E $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n$: anche AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Elem. neutro: E_n
Prop. assoc.: vale per il prod. righe per colonne
Inverso: esiste per def.

Oss. $GL(n,K)$ è un sottog. di $M(n\times n,K)$ per il prodotto, ma non è chiuso rispetto alla somma.

Oss. 1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. A invertibile $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ invertibile
Infatti $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$, perché
${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE_n = E_n$, e analog.

3. Se A è inv., $L(A)$ è un isom.

Infatti ~~...~~ $AA^{-1} = E_n \Rightarrow$

$L(AA^{-1}) = L(E_n) = id_{K^n}$

$\parallel$

$L(A)L(A^{-1})$

E anche $L(A^{-1})L(A) = id_{K^n}$, dunque $L(A^{-1}) = L(A)^{-1}$ è l'inversa di $L(A)$.

Poi in gen.

<u>Teorema</u>

Sia $f : V \longrightarrow W$ lineare

$\dim V = \dim W = n$ finita.

Fissate basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W,

f è un isomorfismo $\Longleftrightarrow M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile.

<u>Dim.</u>

"$\Rightarrow$" f isom. $\Rightarrow \exists f^{-1}$ isom. inverso t.c.

$\cancel{f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f =}$ $\quad f \circ f^{-1} = id_W$

$f^{-1} \circ f = id_V$

Sia $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f^{-1})$.

$$AA' = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_W) = E_n$$

Analogam. $A'A = E_n$

"$\Leftarrow$" $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ invertibile.

Allora $L(A) : K^n \rightarrow K^n$ è un isom.

Ora consid. il diagr. commut.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"'] & W \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"'] & K^n \end{tikzcd}$$

$f = K_{\mathcal{B}}^{-1} \circ L(A) \circ K_{\mathcal{A}}$: composiz. di isomorf. è isom.

Teorema

$A \in M(n \times n, K)$.

Allora A è invertibile se e solo se vale una delle proprietà seguenti:

(i) il rango per colonne è n

(ii) i vettori colonna sono una base di K^n (lin. indip.)

(iii) ${}^tA$ è invertibile

(iv) il rango per righe di A è n

(v) i vettori riga di A sono una base di K^n.

Dim.

A inv. $\Leftrightarrow$ $L(A)$ è isom. $\Leftrightarrow$ $L(A)$ è (iniett. e) suriett. (basta una delle 2 perché la dim è la stessa) $\Leftrightarrow$ i vettori colonna $a^i = L(A)(e_i)$ generano K^n $\Leftrightarrow$ il rango per colonne è n

Le altre sono analoghe ragionando su ${}^tA$.

Cambiamento di base.

V K-sp. vett. di dimensione n

Supp. date 2 basi di V:

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$

$\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$

Consid. il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"', "\simeq"] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}", "\simeq"'] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"'] & K^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d] & v \arrow[d] \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

t.c. $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$\quad = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$

$A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)$ è tale che $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

è detta <u>matrice del cambiamento di base</u> o <u>matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$</u>

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vettore delle coord. di v risp. a $\mathcal{A}$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ " " " " $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La prima colonna contiene le coord. di v_1 risp. a $w_1, \dots, w_n$, ecc.

$\underset{v_1}{\underset{\parallel}{id_V(v_1)}} \quad v_2 \quad v_n$

$\boxed{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V) \text{ è una matrice invertibile}}$

$$v_j = id_V(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot w_i$$

Supp. di avere $\quad \overset{n}{V} \xrightarrow{f} \overset{m}{W}$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ basi di V

$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ basi di W

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}'}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"'] & W \arrow[r, "id_W"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "K_{\mathcal{B}'}"] \\
K^n \arrow[r] & K^n \arrow[r, "L(A)"] & K^m \arrow[r] & K^m
\end{tikzcd}$$

$\qquad M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(id_V) \qquad M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) \qquad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_W)$

Allora:

$$M^{\mathcal{a}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{prodotto delle 3 matrici}$$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_W)\, M^{\mathcal{a}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{a}'}_{\mathcal{a}}(id_V)$$

matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

matrice di passaggio da $\mathcal{a}'$ ad $\mathcal{a}$

Due matrici che rappresentano f rispetto a basi diverse differiscono per il prod. a destra e sin. per 2 matrici invertibili.

<u>Oss</u>: La matrice di passaggio da $\mathcal{a}$ a $\mathcal{B}$ e quella di passaggio da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{a}$ sono una l'inversa dell'altra.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{a}}"'] & V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{a}}"] \\
K^n \arrow[r, "L(M)"'] & K^n \arrow[r, "L(M')"'] & K^n
\end{tikzcd}$$

$L(M') \circ L(M) = L(E_n)$ matrice identica

$M'M = E_n$

Conseguenza di un teorema precedente:

A $m \times n$: esistono matrici <u>invertibili</u> S e T t.c.

$$\underset{m\times m}{S}\,\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times n}{T} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathcal{A}}{K^n} \xrightarrow[T]{id_{K^n}} \underset{\mathcal{E}_n}{K^n} \xrightarrow{L(A)} \underset{\mathcal{E}_m}{K^m} \xrightarrow[S]{id_{K^m}} \underset{\mathcal{B}}{K^m}$$

Dim: consid. $L(A)$; risp. alle basi canoniche A è la sua matrice. Esistono basi $\mathcal{A}$ di K^n e $\mathcal{B}$ di K^m risp. a cui la matrice sia $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Sia $T = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}_n}(id_{K^n})$, $S = M^{\mathcal{E}_m}_{\mathcal{B}}(id_{K^m})$

$\Rightarrow$ SAT è la matrice richiesta.

Da questo si può ottenere una nuova dim. del fatto che il rango per righe è uguale al rango per colonne.

Infatti: 1) chiaram. il rango per righe e per colonne di $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ è uguale a r.

2) il rango per colonne di SAT è uguale al rango dell'appl. lineare $L(SAT)$ associata, che è uguale a $L(S)\circ L(A)\circ L(T)$.
Ma $L(S)$, $L(T)$ sono isomorfismi e quindi $rg(L(SAT)) = rg(L(A)) =$ rango per colonne di A.

3) il rango per righe di SAT è uguale al rango per colonne di ${}^t(SAT) = \underbrace{{}^tT}_{inv.}\,{}^tA\,\underbrace{{}^tS}_{inv.} \Rightarrow$ è uguale al rango per colonne di ${}^tA$, cioè al rango per righe di A.