Caso di un endomorfismo

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_B"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_a"] & V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_a"] & V \arrow[d, "K_B"] \\
K^n \arrow[r, "M^B_a(id_V)"'] & K^n \arrow[r, "L(A)", "A"'] & K^n \arrow[r, "M^a_B(id_V)"'] & K^n
\end{tikzcd}$$

$$M_B(f) = M^a_B(id_V)\, M_a(f)\, M^B_a(id_V)$$

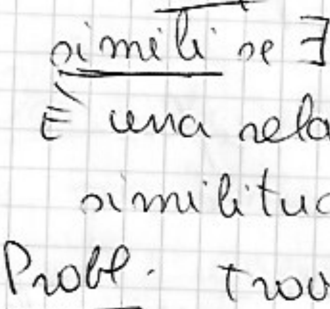
una inversa dell'altra

$$M_B(f) = S\, M_a(f)\, S^{-1}$$ con $S$ matrice del cambiam. di base

~~Dim~~ Def. 2 matrici quadrate $A, B$ sono simili se $\exists\, S$ invertibile t.c. $A = SBS^{-1}$.
È una relaz. d'equivalenza tra matrici: similitudine.

Probl. trovare un rappresentante "più semplice" per la classe di similitudine di una matrice data - forma canonica.

Es. matrice di una riflessione $g$, di asse la retta che forma angolo $\frac{\alpha}{2}$ con l'asse $x$




$$M^E_E(g) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

cambio base: $(v_1, v_2)$, la matrice $M^B_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: sono simili.

$$M_{\mathcal{B}}(g) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)\, M_{\mathcal{C}}(g)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) \qquad V=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \overset{\shortparallel}{S} \qquad \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} \qquad \overset{\shortparallel}{S^{-1}}$$

$$S^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} \\ \quad v_1 \qquad\quad v_2 \end{array}$$ rotazione di angolo $\frac{\alpha}{2}$

$$S = \begin{pmatrix}\cos(-\frac{\alpha}{2}) & -\sin(-\frac{\alpha}{2})\\ \sin(-\frac{\alpha}{2}) & \cos(-\frac{\alpha}{2})\end{pmatrix}$$ rotaz. di angolo $-\frac{\alpha}{2}$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2}\\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}.$$

Fare il conto, usando le formule di duplicazione.

## Algoritmo per il calcolo della matrice inversa.

Prop. Per dire che $A$ è invertibile, basta trovare una matrice $B$ t.c. $BA = E_n$ opp. una matrice $C$ t.c. $AC = E_n$.

Dim. Se $BA = E_n \Rightarrow L(BA) = id_{K^n}$

$$\underset{L(B)\circ L(A)}{\overset{\shortparallel}{\phantom{x}}}$$

Ma allora $L(A)$ è iniettiva (infatti se $L_A(v)=0$, si ha $L_B(L_A(v)) = L_B(0) = 0$ e dunque $v \in \ker L(B)\circ L(A) = 0$) e dunque $L(A)$ è isomorfismo $\Rightarrow A$ è invertibile.

Se invece $AB = E_n \Rightarrow L(AB) = L(A)\circ L(B) = id_{K^n}$.

Allora $L(A)$ è suriettiva (infatti preso $v \in K^n$, si ha $v = L(A)(L(B)(v)) \Rightarrow v \in \operatorname{Im} L(A)$)

perciò $L(A)$ è isomorfismo $\Rightarrow A$ è invertibile.

<u>Oss.</u>: in gen. prese due matrici $AB \neq BA$, ma $AB = E_n \iff BA = E_n$.

Come calcolare l'inversa di $A$, supposta invertibile?

$n = 1$ $\quad A = (a)$ invertibile $\iff a \neq 0$;

$A^{-1} = (a^{-1})$.

$n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ : è invertibile se e solo se ha rango 2

La riduco a gradini:

- se $a_{11} \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \end{pmatrix}$

$a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}$

ha rango $2 \iff a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

- se $a_{11} = 0$, ma $a_{21} \neq 0$

$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix}$ : è invertibile

$\iff a_{12} \neq 0$

- se $a_{11} = 0$, $a_{21} = 0$ non è invertibile.

Dunque in conclusione, qualunque sia $a_{11}$, $A$ è invertibile $\Leftrightarrow \overset{\Delta}{\overbrace{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}} \neq 0$.

Si ha $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$: verificare.

Sia $n$ qualunque.

$A$ $n\times n$: cerchiamo $X$ t.c. $AX = E_n$: equazione matriciale nella matrice incognita $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ matrice di incognite.

$$AX = E_n \Leftrightarrow AX^1 = e_1,\ AX^2 = e_2, \dots, AX^n = e_n$$

dove $X^1, X^2, \dots, X^n$ sono le colonne di $X$.

Trovare $X$ equivale a risolvere $n$ sistemi lineari con matrice dei coefficienti $A$, e colonne dei termini noti $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$A$ è invertibile $\Leftrightarrow$ ognuno di tali sistemi ha 1! soluzione. Per risolverli, usiamo l'algoritmo di Gauss, e riduciamo $A$ a gradini operando contemporaneamente sulla colonna dei termini noti; le trasformazioni sono le stesse per tutti gli $n$ sistemi:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & & \\ \vdots & & & & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right) = \left(A \mid E_n\right) \longrightarrow$$

$$\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{a gradini con } n \text{ pivot}}}{B} \mid C\right)$$ : abbiamo così $n$ sistemi lineari equivalenti ai primi.

Ora operiamo di nuovo trasformazioni elementari a partire dal basso, per mandare a zero tutti gli elementi sopra la diagonale principale di B.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & & & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & b_{22} & & \vdots & \vdots & & \\ & & \ddots & b_{n-1,n} & & & \\ & 0 & & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \longrightarrow$$ mandiamo a zero l'ultima colonna di B sopra $b_{nn}$

ultima riga invariata

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} b_{11} & b_{12}' & \cdots & b_{1,n-1}' & 0 & c_{11}' & \cdots & c_{1n}' \\ 0 & b_{22}' & & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & 0 & & & & & & \\ & \vdots & & b_{n-1,n-1}' & 0 & c_{n-1,1}' & & c_{n-1,n}' \\ 0 & 0 & \cdots & & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \longrightarrow$$ ora mandiamo a zero la penultima colonna sopra $b_{n-1,n-1}$

$(n-1)$-esima riga $- \left(\frac{b_{n-1,n}}{b_{nn}}\right)$ $n$-esima

$(n-2)$-esima riga $- \left(\frac{b_{n-2,n}}{b_{nn}}\right) \cdot$ $n$-esima

$\vdots$

(prima riga) $- \left(\frac{b_{1,n}}{b_{nn}}\right) \cdot$ $n$-esima

$\rightarrow$ ecc. ...

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & & 0 & \\ & b_{22} & & D \\ 0 & & \ddots \; b_{nn} & \end{array}\right)$$

I sistemi lineari ora sono:

$$① \begin{cases} b_{11} x_{11} = d_{11} \\ b_{22} x_{21} = d_{21} \\ \vdots \\ b_{nn} x_{n1} = d_{n1} \end{cases}$$ questo dà la prima colonna di X

$$x_{11} = \frac{d_{11}}{b_{11}}, \quad x_{21} = \frac{d_{21}}{b_{22}}, \ldots, \quad x_{n1} = \frac{d_{n1}}{b_{nn}}$$

$$② \begin{cases} b_{11} x_{12} = d_{12} \\ b_{22} x_{22} = d_{22} \\ \vdots \\ b_{nn} x_{n2} = d_{n2} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_{12} &= \frac{d_{12}}{b_{11}} \\ x_{22} &= \frac{d_{22}}{b_{22}} \\ &\vdots \\ x_{n2} &= \frac{d_{n2}}{b_{nn}} \end{aligned}$$

ecc.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d_{11}}{b_{11}} & \frac{d_{12}}{b_{11}} & \cdots & \frac{d_{1n}}{b_{11}} \\ \frac{d_{21}}{b_{22}} & \frac{d_{22}}{b_{22}} & \cdots & \frac{d_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & & & \\ \frac{d_{n1}}{b_{nn}} & \frac{d_{n2}}{b_{nn}} & & \frac{d_{nn}}{b_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^1}{b_{11}} \\ \frac{d^2}{b_{22}} \\ \vdots \\ \frac{d^n}{b_{nn}} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$