

ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 6

Trieste, 19 novembre 2017

1. (i) Calcolare, se possibile, l'inversa della seguente matrice su \mathbb{R} e su \mathbb{Z}_7 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Determinare per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

è invertibile, e per tali valori calcolare la matrice inversa.

- (iii) Calcolare il rango della seguente matrice reale al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di k questa matrice è invertibile?

2. Determinare il numero di elementi (ossia *l'ordine*) del gruppo $\text{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ delle matrici invertibili $n \times n$, con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$ (dove p è un numero primo). (Suggerimento: contare quanti basi distinte vi sono nello spazio vettoriale $K^n = (\mathbb{Z}_p)^n$.)

3. Per ciascuna delle seguenti matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(con $x \in \mathbb{R}$), trovare matrici quadrate invertibili S e T tali che SAT sia una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$