Esercizi Geometria 3A

20/11/2017

1. Si consideri la curva in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata come segue: $\alpha(t) = (t, 2t, t^4)$. Verificare che la curva è regolare, calcolare la sua funzione curvatura, dimostrare che è piana e scrivere un'equazione del piano in cui è contenuta.

2. Si consideri la curva $\beta(t)$ di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\beta(t) = \left(t + \sqrt{3}\sin t\,, 2\cos t\,, \sqrt{3}t - \sin t\right).$$

   Verificare che $\beta(t)$ è una curva regolare priva di flessi e calcolarne curvatura e torsione, verificando in particolare che sono entrambe costanti e non nulle. Trovare un'elica della forma

$$\alpha(t) = (a\cos t\,, a\sin t\,, bt)$$

   isometrica a $\beta(t)$ e descrivere un'isometria F di $\mathbb{R}^3$ che trasforma α in β.

3. Mostrare che se tutti le rette normali ad una superficie regolare connessa S passano da un punto fissato, allora la superficie è contenuta in una sfera. La retta normale a S in p s'intende la retta affine ortogonale al piano tangente T_pS.

4. Si consideri la funzione $\varphi(u,v) = (u^2, uv^2, v)$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ e sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0) : u \leq 0\}$. Si provi che la restrizione di φ ad A è una parametrizzazione di una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, mostrando che A è un aperto massimale rispetto a tale proprietà (ovvero, preso un qualunque aperto B; $A \subseteq B$, φ ristretto a B non è una parametrizzazione regolare).

5. Siano $\sigma, \tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ le traiettore, parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, di due punti che si muovono soggetti alle seguenti condizioni:
   a. σ parte da $\sigma(0) = (0,0,0)$, e si muove lungo l'asse x nel verso positivo;
   b. τ parte da $\tau(0) = (0, a, 0)$, dove $a \neq 0$, e si muove parallelamente al verso positivo dell'asse z;

Indichiamo con $S \subset \mathbb{R}^3$ l'unione, al variare di $t \in \mathbb{R}$, delle rette passanti per $\sigma(t)$ e $\tau(t)$. Dimostrare che S è una superficie regolare. Trovare per ogni punto $p \in S$ una base del piano tangente T_pS. Dimostrare infine che S è orientabile.